

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO

MODELO MATEMÁTICO DA MÁQUINA DE INDUÇÃO  
COM EFEITOS DE HARMÔNICAS ESPACIAIS DE FORÇA MAGNETOMOTRIZ

JORGE LUIZ DO NASCIMENTO

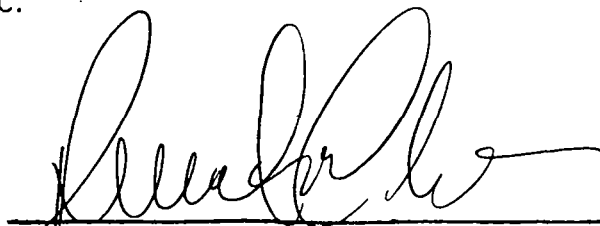
TESE SUBMETIDA A UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.SC)

Florianópolis, 14 de dezembro de 1992.

MODELO MATEMÁTICO DA MÁQUINA DE INDUÇÃO  
COM EFEITOS DE HARMÔNICAS ESPACIAIS DE FORÇA MAGNETOMOTRIZ

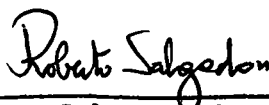
Jorge Luiz do Nascimento

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM CIÊNCIAS  
ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA, (ÁREA DE CONCENTRAÇÃO ENERGIA ELÉTRICA), E  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO DO DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA ELÉTRICA DA UFSC.



Prof. Renato Carlson, Dr.Ing.

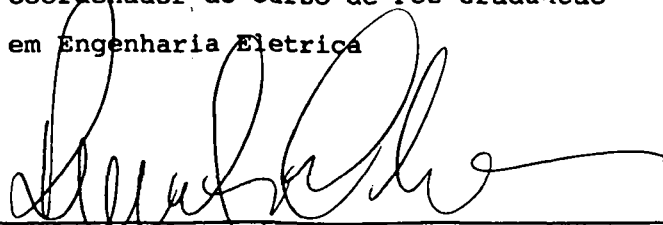
ORIENTADOR



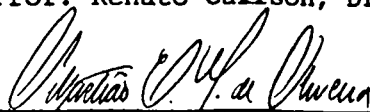
Prof. Roberto Salgado, Ph.D.

Coordenador do Curso de Pos-Graduacao  
em Engenharia Eletrica

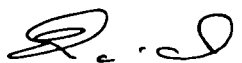
BANCA EXAMINADORA



Prof. Renato Carlson, Dr.Ing.



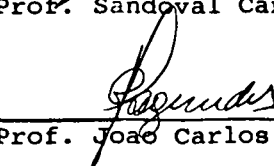
Prof. Sebastião E. M. de Oliveira, D.Sc



Prof. Enio Valmor Kassick, Dr.



Prof. Sandoval Carneiro Junior, Ph.D.



Prof. Joao Carlos dos Santos Fagundes, Dr.

## BIOGRAFIA

Jorge Luiz do Nascimento graduou-se como Engenheiro Elatricista e como Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro no ano 1977. Obteve o grau de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica pela COPPE-UFRJ (Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro) em 1983 e em 1990, graduou-se também em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Santa Catarina.

É Professor Adjunto do Departamento de Eletrotécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, onde ingressou como Professor Auxiliar no ano de 1979.

Exerceu o cargo de Engenheiro na Companhia de Energia Elétrica do Rio de Janeiro no ano de 1978.

Lecionou nas seguintes escolas superiores do Rio de Janeiro: Escola Naval, Universidade Católica de Petrópolis, Associação Educacional Veiga de Almeida e Universidade Santa Úrsula.

Foi Diretor eleito do Instituto de Eletrotécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro de outubro de 1984 a novembro de 1986.

Atualmente leciona as disciplinas Conversão Eletromecânica de Energia, Máquinas Elétricas e Eletricidade Básica, já tendo lecionado também as disciplinas Circuitos Elétricos e Eletrotécnica Aplicada.

Suas principais atividades de pesquisa concentram-se nas áreas de Máquinas Elétricas e Fontes Alternativas de Energia.

É membro da Sociedade Brasileira de Automática.

## SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS	iv
RESUMO	xxiv
ABSTRACT	xxv
 I INTRODUÇÃO	 1
 II ESTRUTURA DA MÁQUINA DE INDUÇÃO E SUAS EQUAÇÕES ORIGINAIS	 6
II.1 ESTRUTURA DA MÁQUINA	6
II.2 SISTEMA DE EQUAÇÕES REPRESENTATIVAS DA MÁQUINA	9
II.2.1 DISTRIBUIÇÃO DE FLUXOS E INDUTÂNCIAS	10
II.2.2 INDUTÂNCIAS MÚTUAS ENTRE ESTATOR E ROTOR	10
II.2.3 INDUTÂNCIAS DO ESTATOR	15
II.2.4 INDUTÂNCIAS DO ROTOR	16
II.2.5 MATRIZES DE RESISTÊNCIAS E DE INDUTÂNCIAS	18
II.3 CONCLUSÕES	23
 III TRANSFORMAÇÃO EM COMPONENTES SIMÉTRICAS	 24
III.1 APLICAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO	24
III.2 CÁLCULO DA MATRIZ DE MÚTUAS EM COMPONENTES SIMÉTRICAS	31
III.2.1 ANÁLISE DAS EXPRESSÕES EM $a=e^{j2\pi/3}$	37
III.2.2 ANÁLISE DAS EXPRESSÕES EM $b=e^{j2\pi/m}$	38
III.2.3 SIMPLIFICAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO DA MATRIZ DE MÚTUAS $L_{sr}$	45
III.2.4 REDUÇÃO DA ORDEM DO SISTEMA DE EQUAÇÕES	46
III.2.5 ELIMINAÇÃO DOS SOMATÓRIOS DA MATRIZ $L_{sr}$	47
	11
III.3 NÚMERO DE COLUNAS NÃO NULAS NA MATRIZ DE MÚTUAS	49
III.4 RELAÇÃO ENTRE ELEMENTOS NÃO NULOS NA MATRIZ $L_{sr}$	51
III.5 COLUNAS LATERAIS EXTREMAS DE $L_{sr}$	58
III.6 CONCLUSÕES	62
 IV SISTEMA DE EQUAÇÕES A COEFICIENTES CONSTANTES	 64
IV.1 JUSTIFICATIVA DA TRANSFORMAÇÃO	64

	11
IV.2 MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO	65
IV.3 INTERPRETAÇÃO FÍSICA DAS TRANSFORMAÇÕES	67
IV.4 APLICAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO AO SISTEMA DE EQUAÇÕES	79
IV.5 SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES EM REGIME PERMANENTE	83
IV.6 SOLUÇÃO PARA O REGIME DINÂMICO	93
IV.7 RETORNO AO SISTEMA ORIGINAL	93
IV.8 CONCLUSÕES	99
V MÁQUINA MONOFÁSICA	100
V.1 ESTUDO DO REGIME PERMANENTE	102
V.2 SISTEMA A COEFICIENTES CONSTANTES	113
V.3 INTERPRETAÇÃO FÍSICA DAS TRANSFORMAÇÕES	129
V.4 ESTUDO DO REGIME TRANSITÓRIO	131
V.4.1 SISTEMA DE EQUAÇÕES	132
V.4.2 APLICAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO DE COMPONENTES SIMÉTRICAS	133
V.4.3 SISTEMA A COEFICIENTES CONSTANTES	137
V.4.4 TRANSFORMAÇÃO DE VARIÁVEIS NO ESTATOR	139
V.5 CONCLUSÕES	144
VI MÁQUINAS COM ROTOR DE DUPLA GAIOLA	145
VI.1 FORMALIZAÇÃO DAS MATRIZES	152
VI.2 TRANSFORMAÇÃO EM COMPONENTES SIMÉTRICAS	155
VI.3 SISTEMA A COEFICIENTES CONSTANTES	157
VI.4 EXPRESSÃO DO CONJUGADO	159
VI.5 CONCLUSÕES	160
VII PARÂMETROS DA MÁQUINA DE INDUÇÃO	162
VII.1 INTRODUÇÃO	162
VII.2 RESISTÊNCIAS	164
VII.3 INDUTÂNCIAS DE DISPERSÃO	167
VII.4 INDUTÂNCIAS PRÓPRIAS E MÚTUAS	171
VII.5 OBTENÇÃO DE REATÂNCIAS POR CÁLCULO DE CAMPO	172
VII.5.1 CÁLCULO DE CAMPO BIDIMENSIONAL	172
VII.5.2 CÁLCULO DE CAMPO TRIDIMENSIONAL	174
VII.6 CONCLUSÕES	181
VIII RESULTADOS E COMPARAÇÕES	182

	111
VIII.1 INTRODUÇÃO	182
VIII.2 VALIDAÇÃO DOS MODELOS	183
VIII.2.1 ENSAIOS DE ROTOR LIVRE E ROTOR BLOQUEADO	183
VIII.2.2 CURVAS DE REGIME PERMANENTE	184
VIII.2.3 CURVAS EM REGIME TRANSITÓRIO DE PARTIDA	191
VIII.3 COMPARAÇÃO COM MODELO DE PARK	198
VIII.4 APLICAÇÕES	202
VIII.5 CONCLUSÕES	202
IX CONCLUSÕES GERAIS	204
APÊNDICE A DEMONSTRAÇÃO DE $L_{sr} = L_{rg}^{t*}$	209
APÊNDICE B CARACTERÍSTICAS DAS MÁQUINAS E PARÂMETROS CALCULADOS	211
APÊNDICE C DADOS DOS FABRICANTES	236
BIBLIOGRAFIA	259

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\#^*$ :	Conjugado de uma variável complexa $\#$ qualquer
$\#^t$ :	Transposto de um vetor ou de uma matriz $\#$ qualquer
$0_{12}$ :	Simbologia de matrizes e vetores em componentes simétricas
$0$ :	Matriz ou vetor nulo
$\sum_{n=1}^{\infty}$ :	Somatório de uma variável qualquer dependente de $n$ , quando $n$ varia de 1 a $\infty$ , só como valores ímpares.
$n$ ímpar	
$A$ :	Matriz de transformação das variáveis originais do estator para o sistema de componentes simétricas
$a$ :	Operador vetorial complexo para giro de $2\pi/3$ rd, $e^{j2\pi/3}$
$A^{-1}$ :	Inversa da matriz de transformação de componentes simétricas
$A_1$ :	Seção transversal contornada por um enrolamento do rotor e atravessada por fluxo
$A_2$ :	O mesmo que a $A_1$
$ACT$ :	Lance médio ponderado das bobinas em número de ranhuras
$Ag$ :	Seção transversal do entreferro
$A_k$ :	Área de cálculo de fluxo da região $k$
$An$ :	Amplitude da onda de força magnetomotriz produzida por um enrolamento do estator
$B$ :	Indução magnética escalar
$\vec{B}$ :	Indução magnética vetorial
$B$ :	Matriz de transformação das variáveis originais do rotor em componentes simétricas
$b$ :	Trecho reto da cabeça de bobina
$\vec{b}$ :	Operador vetorial complexo para giro de $2\pi/m$ rd, $e^{j2\pi/m}$
$B^{-1}$ :	Inversa da matriz de transformação de componentes simétricas
$B_1$ :	Densidade média de fluxo na superfície contornada pelo enrolamento relativa ao campo $H_1$ na seção $A_1$
$B_2$ :	Densidade de fluxo magnético fluxo em um dos caminhos alternativos, que passa do estator para o rotor relativa ao campo $H_2$ na seção $A_2$
$Ba$ :	Coefficiente de atrito

- B<sub>g</sub> : Densidade de fluxo no entreferro
- B<sub>n</sub> : Componente harmônica de ordem n de fluxo distribuído de uma fase i do estator
- B<sub>k</sub> : Densidade de fluxo magnético de um caminho k
- B<sub>n</sub><sup>k</sup> : Componente harmônica de ordem n da densidade de fluxo magnético produzido pela fase k em uma posição  $\phi_s$  do entreferro.
- B<sub>n</sub> : Valor de pico da densidade de fluxo em função do valor máximo de corrente
- B<sub>n</sub>(y) : Densidade de fluxo em relação à componente harmônica de ordem n na posição y da superfície do entreferro
- b<sub>r</sub> : Sobra da barra entre o rotor e o anel
- C : Número total de condutores em série na ranhura ou número total de condutores em série por fase de um enrolamento
- c : Potência do vetor complexo b igual a b<sup>p</sup> ou e<sup>j2πp/m</sup>
- Ca : Capacitância do capacitor ligado ao enrolamento auxiliar
- C<sub>l</sub> : Parâmetro igual a  $4\sin^2\left[\frac{l\pi}{m}\right]$ , p/ l = 0, 1, 2, ..., m-1
- C<sub>x</sub> : Fator de distribuição para dispersão de ranhura
- D : Matriz de transformação das variáveis do estator do motor monofásico em componentes simétricas
- D : Diâmetro médio no entreferro
- d : Parâmetro inerente da transformação para sistema de equações a coeficientes constantes com valor arbitrário. É mais simplificador quando é igual a  $\frac{hgm}{2}$
- d<sub>1</sub> : Dimensão da cabeça de bobina
- d : Distância do ponto ao condutor
- D<sup>-1</sup> : Inversa da matriz D
- D<sub>1</sub> : Diâmetro do furo do estator
- d<sub>1</sub> : Profundidade da ranhura
- d<sub>10</sub> : Profundidade da boca da ranhura
- d<sub>11</sub> : Profundidade do fechamento da ranhura
- d<sub>c</sub> : Distância radial da circunferência média do anel até o centro da parte reta da ranhura do estator
- d/dt : Operador derivada em relação ao tempo
- d/dφ : Operador derivada em relação a posição angular do rotor
- De : Diâmetro médio entre centros de ranhuras
- der : Largura do anel
- Di : Diâmetro interno do anel



Dr :	Diâmetro médio do anel
e :	Espessura dos anéis
Es :	Matriz formada pelas ordens harmônicas $\nu=np$ dos expoentes dos elementos de Ts, resultante da derivação no tempo desta mesma matriz
Er :	Matriz formada pelas ordens harmônicas $\nu=np$ dos expoentes dos elementos de Tr, resultante da derivação no tempo desta mesma matriz
Erk :	Elemento de Er
f :	Frequência da rede.
fc :	Comprimento da cabeça de bobina
FC :	Fator de correção do número de condutores para cálculo numérico da impedância de cabeça de bobina
$\mathcal{F}_{mm}$ :	Força magnetomotriz em um ponto qualquer do entreferro de coordenada angular x
fmm :	Força magnetomotriz produzida por um enrolamento qualquer
$\mathcal{F}_{mm_k}(x)$ :	Componente de ordem harmônica k da força magnetomotriz em um ponto qualquer de coordenada angular x
$\mathcal{F}_{mm_n}$ :	Componente harmônica de ordem n de força magnetomotriz em um ponto qualquer do entreferro
fmm(x) :	Força magnetomotriz em um ponto qualquer de coordenada angular x
FSM :	Fator de saturação magnética
g :	Menor inteiro maior que zero que torna inteira a expressão $r=\frac{gm}{2p}$
Gn :	Fasor auxiliar de representação
H :	Campo magnético de uma região
h :	Altura da barra da gaiola ou,
h :	Parâmetro de determinação do tipo de harmônica dos elementos da coluna $l=p$
H1 :	Queda de força magnetomotriz no entreferro, no caminho do fluxo total criado por um enrolamento do rotor, passando do rotor para o estator
H2 :	Queda de força magnetomotriz no entreferro, em um caminho alternativo de fluxo enlaçado por um enrolamento do rotor, passando do estator para o rotor
hde :	Altura dos dentes do estator
hdr :	Altura dos dentes do rotor
Hk :	Queda de força magnetomotriz em um caminho k de fluxo magnético qualquer
Hn :	Fasor auxiliar de representação

$H_s$ :	Campo magnético produzido no espaço de estudo
$I$ :	Corrente de pico em condutores quaisquer
$I$ :	Matriz identidade de ordem genérica
$i$ :	Corrente nos condutores de uma bobina qualquer
$l$ :	Corrente de um enrolamento qualquer
$[l]$ :	Vetor de correntes da máquina no sistema de variáveis originais
$I_1$ :	Corrente eficaz nominal no estator
$iae_k$ :	Correntes de segmento de anel $k$ ou de enrolamento $k$ da gaiola externa do rotor
$iai_k$ :	Correntes de segmento de anel $k$ ou de enrolamento $k$ da gaiola interna do rotor
$ia_k$ :	Correntes de segmento de anel ou de enrolamento do rotor no sistema de variáveis originais ( $k = 1, 2, \dots, m$ )
$ib$ :	Inclinação das Barras
$ibe_k$ :	Corrente da barra $k$ da gaiola externa do rotor
$ibi_k$ :	Corrente da barra $k$ da gaiola interna do rotor
$ib_k$ :	Correntes da barra $k$ da gaiola no sistema de variáveis originais
$ic$ :	Corrente no capacitor do enrolamento auxiliar
$Imax$ :	Corrente de pico no enrolamento
$Ir$ :	Vetor de fasores do rotor no sistema de coeficientes constantes
$lr$ :	Vetor de correntes dos enrolamentos do rotor em variáveis originais
$ir$ :	Vetor de correntes do rotor no sistema de componentes simétricas
$ir$ :	Vetor de correntes do rotor no sistema de coeficientes constantes
$ir^+$ :	Vetor de correntes do rotor de seqüência positiva no sistema de coeficientes constantes
$ir^+$ :	Vetor de correntes do rotor resultante da aplicação da tensão de seqüência positiva do estator no sistema de equações a coeficientes constantes em regime permanente
$ir^{+*}$ :	Vetor de correntes definido da seguinte forma $[Irr^{+*}, \dots, Ir3^{+*}, Ir2^{+*}, Ir1^{+*}]$
$ir^-$ :	Vetor de correntes do rotor resultante da aplicação da tensão de seqüência negativa do estator no sistema de equações a coeficientes constantes em regime permanente
$ir^{-*}$ :	Vetor de correntes definido da seguinte forma $[Irr^{-*}, \dots, Ir3^{-*}, Ir2^{-*}, Ir1^{-*}]$

- $i_{re}$  : Vetor de correntes dos enrolamentos da gaiola externa do rotor em variáveis originais
- $i_{re}$  : Vetor de correntes dos enrolamentos da gaiola externa do rotor em variáveis de componentes sométricas
- $i_{re}$  : Vetor de correntes da gaiola externa do rotor no sistema de coeficientes constantes
- $I_{ref_j}$  : Valor eficaz da corrente do enrolamento do rotor do motor monofásico
- $i_{re_k}$  : Corrente do eixo de referência k da gaiola externa no sistema de coeficientes constantes
- $i_{ri}$  : Vetor de correntes dos enrolamentos da gaiola interna do rotor em variáveis originais
- $i_{ri}$  : Vetor de correntes dos enrolamentos da gaiola interna do rotor em variáveis de componentes sométricas
- $i_{ri}$  : Vetor de correntes da gaiola interna do rotor no sistema de coeficientes constantes
- $i_{ri_k}$  : Corrente do eixo de referência k da gaiola interna no sistema de coeficientes constantes ---
- $i_{r_k}$  : Corrente do enrolamento da fase k do rotor
- $i_{r_k}$  : Componente simétrica de seqüência k da corrente do rotor no sistema de componentes simétricas
- $i_{r_k}$  : Corrente do eixo k do rotor, elemento do vetor de correntes  $i_r$  no sistema de coeficientes constantes
- $I_{r_k}$  : Cada elemento de  $I_r$
- $I_{r_k^+}$  : Cada elemento de  $I_r^+$
- $I_{r_k^-}$  : Cada elemento de  $I_r^-$
- $i_{rx_v}$  : Componente real da corrente  $i_{r_v}$
- $i_{ry_v}$  : Componente imaginária da corrente  $i_{r_v}$
- $I_s$  : Vetor de fasores de seqüência positiva do estator
- $i_s$  : Corrente em enrolamento qualquer do estator
- $i_s$  : Vetor de correntes do estator em variáveis originais
- $i_s$  : Vetor de correntes do estator no sistema de componentes simétricas
- $i_s$  : Vetor de correntes do estator no sistema de coeficientes constantes
- $I_s^+$  : Vetor de correntes do estator resultante da aplicação da tensão de seqüência positiva do estator no sistema de equações a coeficientes constantes em regime permanente

- $Is^+$  : Vetor de correntes definido da seguinte forma  $[Is_2^{+*}, Is_1^{+*}]$   
 $Is^-$  : Vetor de correntes do estator resultante da aplicação da tensão de seqüência negativa do estator no sistema de equações a coeficientes constantes em regime permanente  
 $Is^-$  : Vetor de correntes definido da seguinte forma  $[Is_2^{-*}, Is_1^{-*}]$   
 $is_0$  : Corrente de seqüência zero no sistema de componentes simétricas  
 $is_1$  : Corrente de seqüência positiva no sistema de componentes simétricas  
 $is_2$  : Corrente de seqüência negativa no sistema de componentes simétricas  
 $is_1$  : Corrente de seqüência positiva, elemento do vetor de correntes  $is$   
 $is_2$  : Corrente de seqüência negativa, elemento do vetor de correntes  $is$   
 $isa$  : Corrente no enrolamento auxiliar do motor monofásico  
 $isa$  : Corrente em quadratura do motor monofásico em componentes simétricas  
 $isa$  : Corrente do enrolamento auxiliar no sistema de coeficientes constantes e após a última transformação de componentes simétricas  
 $isa$  : Corrente do enrolamento da fase a do estator  
 $isb$  : Corrente do enrolamento da fase b do estator  
 $isc$  : Corrente do enrolamento da fase c do estator  
 $I_{sef}$  : Valor eficaz da corrente do enrolamento principal do motor monofásico  
 $Is_k$  : Cada elemento de  $Is$   
 $is_k$  : Corrente da fase k do estator  
 $is_k$  : Componente simétrica k da corrente do estator  
 $is_k$  : Corrente do enrolamento k do estator  
 $is_k$  : Corrente do eixo k do estator no sistema de coeficientes constantes  
 $Is_k^+$  : Cada elemento de  $Is^+$   
 $isp$  : Corrente no enrolamento principal do motor monofásico  
 $isp$  : Corrente do enrolamento principal do estator no sistema de componentes simétricas  
 $isp$  : Amplitude da corrente  $isp$  ou  $isp$   
 $isp$  : Corrente do enrolamento principal do estator no sistema de coeficientes constantes  
 $isp^+$  : Fasor de corrente do enrolamento principal do estator resultante da aplicação da tensão de seqüência positiva do estator no sistema de equações a coeficientes constantes em regime permanente  
 $isp^+$  : Corrente de seqüência positiva do enrolamento principal

$I_{sp}^-$ :	Fasor de corrente do enrolamento principal do estator resultante da aplicação da tensão de seqüência negativa do estator no sistema de equações a coeficientes constantes em regime permanente
$i_{sp}^-$ :	Corrente de seqüência positiva do enrolamento auxiliar
$i_{sx}$ :	Componente real da corrente $i_{s1}$
$i_{sy}$ :	Componente imaginária da corrente $i_{s1}$
$J$ :	Momento de inércia das partes girantes da máquina
$K_c$ :	Fator de Carter combinado do estator e do rotor
$K_{cest}$ :	Fator de Carter do estator
$K_{crot}$ :	Fator de Carter do rotor
$K_{dn}$ :	Fator de distribuição das bobinas em um enrolamento do estator relativo a uma componente de enlace de fluxo de ordem $n$
$K_n$ :	Fasor auxiliar de representação
$K_p$ :	Igual a $(1-P/100)$
$K_{pn}$ :	Fator de passo de uma espira ou de um enrolamento do estator ou do rotor relativo a uma componente de enlace de fluxo de ordem $n$
$K_r$ :	Fator de correção devido à penetração de fluxo
$K_{ring}$ :	Fator de correção da resistência do anel devido a difusão de correntes da barra para o anel (ou vice-versa)
$K_{s1}$ :	Constante de ranhura do estator e
$K_{s2}$ :	Constante de ranhura do rotor.
$K_{sp}$ :	Constante de ranhura
$K_{sp}''$ :	Constante de ranhura
$K_{sr}$ :	Fator de Carter para estator e rotor
$K_\phi$ :	Fator de correção do fluxo devido a queda de tensão
$K_w$ :	Fator de enrolamento
$K_{wan}$ :	Fator de enrolamento do enrolamento auxiliar do estator relativo a harmônica $n$
$K_{wn}$ :	Fator de enrolamento do estator relativo a harmônica $n$
$K_{wpn}$ :	Fator de enrolamento do enrolamento principal do estator relativo a harmônica $n$
$K_x$ :	Fator de correção da reatância da barra devido o efeito de penetração de fluxo
$L$ :	Comprimento do condutor
$[L]$ :	Matriz de indutâncias da máquina em variáveis originais
$l$ :	Comprimento útil do estator ou do rotor ou dimensão da máquina no sentido do eixo

$l$ :	Variável inteira associada à ordem da coluna da matriz $L_{sr}$
$i$ :	Igual a $i(k)$ , o mesmo que $l$
$L_1$ :	Elemento (indutância) (2,2) e (3,3) da matriz $L_{ss}$ igual a $\frac{L_{sp}+L_{sa}}{2}$
$L_2$ :	Elemento (indutância) (2,3) e (3,2) da matriz $L_{ss}$ igual a $\frac{L_{sp}-L_{sa}}{2}$
$l_a$ :	Indutância de dispersão de segmento de anel
$l_a$ :	Comprimento do anel
$l_{ae_k}$ :	Indutância de dispersão de segmento de anel $k$ da gaiola externa do rotor
$l_{ai_k}$ :	Indutância de dispersão de segmento de anel $k$ da gaiola interna do rotor
$l_b$ :	Indutância de dispersão de uma barra
$l_b$ :	Comprimento da barra
$l_{be_k}$ :	Indutância de dispersão da barra $k$ da gaiola externa do rotor
$l_{bi_k}$ :	Indutância de dispersão da barra $k$ da gaiola interna do rotor
$l_{bei_k}$ :	Indutância de dispersão mútua entre as barras $k$ das gaiolas externa e interna do rotor
$l_{cb1}$ :	Indutância de cabeça de bobina do estator
$l_{cb2}$ :	Indutância de dispersão do segmento de anel
$l_{ce}$ :	Largura da coroa do estator
$l_{cr}$ :	Largura da coroa do rotor
$l_d$ :	Ordem da coluna lateral direita da matriz $L_{sr}$
$l_e$ :	Comprimento útil do estator
$l_e$ :	Ordem da coluna lateral esquerda da matriz $L_{sr}$
$L_{jk}$ :	Elemento da matriz de indutâncias de dispersão do rotor
$L_k$ :	Pode ser o mesmo que $L_{rk}$
$l_k$ :	Comprimento de um caminho magnético em estudo
$l(k)$ :	Harmônicas $n_p$ da matriz $L_{sr}$ na ordenação de formação $k$
$i(k)$ :	Ordem da coluna de posicionamento da harmônica $l(k)$
$l_{kn}$ :	Indutância do estator relativa a componente simétrica $k$ e harm. $n$
$LMC$ :	Comprimento médio dos condutores
$L_r$ :	Parâmetro de indutância própria e mútua do rotor
$l_r$ :	Comprimento útil de ferro do rotor
$L_{rk}$ :	Elemento da matriz $L_{rr}$ ou indutância total do rotor relativa a componente simétrica $k$
$L_{r_{jk}}$ :	Indutância mútua entre dois enrolamentos do rotor
$l_{r_{jk}}$ :	Elemento da matriz de indutâncias de dispersão do rotor
$L_{r_{kk}}$ :	Indutância própria de um enrolamento $k$ do rotor

- $l_{rr\ k j}$  : O mesmo que  $L_{r\ k j}$   
 $\mathcal{L}_{rr}$  : Matriz de indutâncias dos enrolamentos do rotor em variáveis originais  
 $[\mathcal{L}_{rr}]$  : Matriz de indutâncias dos enrolamentos do rotor em variáveis originais  
 $\mathcal{L}_{rr}$  : Matriz de indutâncias do rotor no sistema de componentes simétricas  
 $\mathcal{L}_{rre}$  : Matriz de indutâncias da gaiola externa do rotor em variáveis originais  
 $\mathcal{L}_{rre}$  : Matriz de indutâncias da gaiola externa do rotor em variáveis de componentes simétricas  
 $\mathcal{L}_{rrei}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre as duas gaiolas em variáveis originais  
 $\mathcal{L}_{rrei}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre as duas gaiolas em variáveis de componentes simétricas  
 $\mathcal{L}_{rri}$  : Matriz de indutâncias da gaiola interna do rotor em variáveis originais  
 $\mathcal{L}_{rri}$  : Matriz de indutâncias da gaiola interna do rotor em variáveis de componentes simétricas  
 $\mathcal{L}_{rrie}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre as duas gaiolas em variáveis originais  
 $\mathcal{L}_{rrie}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre as duas gaiolas em variáveis de componentes simétricas  
 $\mathcal{L}_{rs}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre enrolamentos do rotor e estator em variáveis originais  
 $[\mathcal{L}_{rs}]$  : Matriz de indutâncias mútuas entre enrolamentos do rotor e estator em variáveis originais  
 $\mathcal{L}_{rs}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre rotor e estator no sistema de componentes simétricas  
 $\mathcal{L}_{rsa}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre o enrolamento auxiliar do estator e os enrolamentos do rotor em variáveis originais  
 $\mathcal{L}_{rsa}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre o enrolamento auxiliar do estator e os enrolamentos do rotor em componentes simétricas  
 $\mathcal{L}_{rse}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre os enrolamentos da gaiola externa e os enrolamentos do estator em variáveis originais  
 $\mathcal{L}_{rse}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre os enrolamentos da gaiola externa e os enrolamentos do estator em variáveis de componentes simétricas

- $\mathcal{L}_{rs1}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre os enrolamentos da gaiola interna e os enrolamentos do estator em variáveis originais
- $L_{rs1}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre os enrolamentos da gaiola interna e os enrolamentos do estator em variáveis de componentes simétricas
- $\mathcal{L}_{rsp}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre o enrolamento principal do estator e os enrolamentos do rotor em variáveis originais
- $L_{rsp}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre o enrolamento principal do estator e os enrolamentos do rotor em componentes simétricas
- $l_s$  : Indutância de ranhura do estator
- $L_{s0}$  : Elemento (indutância) da matriz  $L_{ss}$  referente à sequência zero
- $L_{s1}$  : Elemento (indutância) da matriz  $L_{ss}$  referente à sequência positiva
- $L_{s2}$  : Elemento (indutância) da matriz  $L_{ss}$  referente à sequência negativa
- $L_{sa}$  : Indutância própria do enrolamento auxiliar do motor monofásico
- $L_{sa}$  : Indutância própria da fase  $a$  do estator
- $L_{sab}$  : Indutância mútua entre fases  $a$  e  $b$  do estator
- $L_{sabn}$  : Indutância mútua entre fases  $a$  e  $b$  do estator relativa a harmônica  $n$
- $L_{san}$  : Indutância própria da fase  $a$  do estator relativa a harmônica  $n$
- $L_{sb}$  : Indutância própria da fase  $b$  do estator
- $L_{sbc}$  : Indutância mútua entre as fases  $b$  e  $c$  do estator
- $L_{sc}$  : Indutância própria da fase  $c$  do estator
- $L_{sca}$  : Indutância mútua entre as fases  $c$  e  $a$  do estator
- $l_{sd}$  : Indutância total de dispersão de uma fase ou de um enrolamento do estator
- $l_{sda}$  : Indutância de dispersão do enrolamento auxiliar do estator
- $l_{sdp}$  : Indutância de dispersão do enrolamento principal do estator
- $L_{sk}$  : Indutância total do estator relativa a componente simétrica  $k$
- $l_{s_n}$  : Parâmetro de indutância própria do estator relativa a harmônica  $n$
- $L_{sp}$  : Indutância própria do enrolamento principal do motor monofásico
- $\mathcal{L}_{sr}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre enrolamentos do estator e rotor em variáveis originais
- $[\mathcal{L}_{sr}]$  : Matriz de indutâncias mútuas entre enrolamentos do estator e rotor em variáveis originais
- $L_{sr}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre estator e rotor no sistema de componentes simétricas
- $\mathcal{L}_{sra}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre o enrolamento auxiliar do estator e os enrolamentos do rotor em variáveis originais
- $[\mathcal{L}_{sra}]$  : O mesmo que  $\mathcal{L}_{sra}$



- $L_{sra}$  : Matriz de indutâncias mútuas do enrolamento auxiliar com os enrolamentos do rotor no sistema de componentes simétricas
- $l_{srak}$  : Elemento da matriz  $L_{sra}$
- $L_{sran}$  : Parâmetro de indutância mútua entre o enrolamento auxiliar do estator e os enrolamentos do rotor relativo a harmônica de ordem  $n$
- $L_{sra}_v$  : O mesmo que  $L_{sran}$  para  $v=np$
- $L_{sre}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre os enrolamentos do estator e os enrolamentos da gaiola externa em variáveis originais
- $L_{sre}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre os enrolamentos do estator e os enrolamentos da gaiola externa em variáveis de componentes simétricas
- $L_{sri}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre os enrolamentos do estator e os enrolamentos da gaiola interna em variáveis originais
- $L_{sri}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre os enrolamentos do estator e os enrolamentos da gaiola interna em variáveis de componentes simétricas
- $l_{sr_{kj}}$  : Indutância mútua entre os enrolamentos  $j$  do estator e  $k$  do rotor para gaiola dupla
- $L_{sr_{jk}}$  : Indutância mútua entre os enrolamentos  $j$  do estator e  $k$  do rotor
- $L_{sr_n}^{jk}$  : Componente de ordem  $n$  da indutância mútua  $L_{sr_{jk}}$
- $L_{sr_n}$  : Componente da harmônica de ordem  $n$  da matriz  $L_{sr}$
- $L_{sr_n}$  : Parâmetro de indutância mútua entre enrolamentos do estator e do rotor relativo a harmônica de ordem  $n$
- $L_{srp}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre o enrolamento principal do estator e os enrolamentos do rotor em variáveis originais
- $[L_{srp}]$  : O mesmo que  $L_{srp}$
- $L_{srp}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre o enrolamento principal do estator e os enrolamentos do rotor no sistema de componentes simétricas
- $l_{srpk}$  : Elemento da matriz  $L_{srp}$
- $L_{srpn}$  : Parâmetro de indutância mútua entre o enrolamento principal do estator e os enrolamentos do rotor relativo a harmônica  $n$ .
- $L_{srp}_v$  : Idem a  $L_{srpn}$ , com  $v=pn$
- $L_{ss}$  : Matriz de indutâncias dos enrolamentos do estator em variáveis originais

- [ $\mathcal{L}_{ss}$ ] : Matriz de indutâncias dos enrolamentos do estator em variáveis originais
- $\mathcal{L}_{ss}$  : Matriz de indutâncias do estator no sistema de componentes simétricas
- $\mathcal{L}_{ss}$  : Matriz de indutâncias do estator no sistema de coeficientes constantes
- $\mathcal{L}_{zz1}$  : Indutância zig-zag do estator
- $\mathcal{L}_{zz2}$  : Indutância zig-zag equivalente do rotor
- $\mathcal{L}_{zzb}$  : Indutância zig-zag de uma barra da gaiola
- $m$  : Número de barras da gaiola da máquina
- $\mathcal{M}_n$  : Matriz das funções variáveis no tempo, coeficientes das indutâncias mútuas de ordem  $n$  entre estator e rotor
- $m_n$  : Elemento da matriz  $\mathcal{L}_{sr}$ , o mesmo que  $m_v$
- $\mathcal{M}_{rs}$  : Matriz de indutâncias mútuas no sistema a coeficientes constantes
- $\mathcal{M}_{sr}$  : Matriz de indutâncias mútuas no sistema a coeficientes constantes
- $\mathcal{M}_{srk,j}$  : Elemento da matriz  $\mathcal{M}_{sr}$ ,  $k = 1$  ou  $2$  e  $j = 1, 2, \dots, r$
- $\mathcal{M}_{sro}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre enrolamentos de estator e rotor
- $\mathcal{M}_{srp}$  : Matriz de indutâncias mútuas entre o enrolamento principal e os enrolamentos do rotor no sistema de coeficientes constantes
- $\mathcal{M}_T$  : Matriz para cálculo de conjugado
- $\mathcal{M}_{Tk,j}$  : Elemento da matriz  $\mathcal{M}_T$ ,  $k = 1$  ou  $2$  e  $j = 1, 2, \dots, r$
- $m_v$  : Indutância relativa à harmônica  $v=pn$
- $M_v$  : Elemento da matriz  $\mathcal{M}$  ou módulo de  $m_v$
- $N$  : Número de espiras de um enrolamento qualquer
- $n$  : Ordem de harmônica
- $n_{bob}$  : Número de bobinas por fase
- $P$  : Número de pólos da máquina
- $p$  : Número de par de pólos da máquina
- $q$  : Número de enrolamentos paralelos no estator
- $R$  : Raio médio de entreferro ou genericamente raio
- $R$  : Raio da espira da cabeça de bobina
- [ $\mathcal{R}$ ] : Matriz de resistências da máquina em variáveis originais
- $r$  : Número de colunas não nulas da matriz  $\mathcal{L}_{sr}$
- $R_1$  : Elemento (2,2) e (3,3) da matriz  $\mathcal{R}_{ss}$  igual a  $\frac{R_{sp}+R_{sa}}{2}$
- $r_1$  : Resistência por fase do estator
- $R_2$  : Elemento (2,3) e (3,2) da matriz  $\mathcal{R}_{ss}$  igual a  $\frac{R_{sp}-R_{sa}}{2}$
- $R_a$  : Resistência do anel

$r_a$ :	Resistência de segmento de anel
$r_a'$ :	Resistência de segmento de anel
$r_{ae}$ :	Resistência de segmento de anel da gaiola externa
$r_{ae}_k$ :	Resistência do segmento de anel k da gaiola externa
$r_{ai}$ :	Resistência de segmento de anel da gaiola interna
$r_{ai}_k$ :	Resistência do segmento de anel k da gaiola interna
$r_b$ :	Resistência de uma barra
$r_{be}$ :	Resistência de uma barra da gaiola externa
$r_{be}_k$ :	Resistência da barra k da gaiola externa
$r_{bi}$ :	Resistência de uma barra da gaiola interna
$r_{bi}_k$ :	Resistência da barra k da gaiola interna
$R_{ea}$ :	Raio externo dos anéis da gaiola
$R_{ee}$ :	Raio externo do estator
$R_{eixo}$ :	Raio do eixo
$R_{er}$ :	Raio externo do rotor
$R_{ia}$ :	Raio interno dos anéis da gaiola
$R_{ie}$ :	Raio do furo do estator
$R_{jk}$ :	Elemento genérico da matriz de resistências do rotor $R_{rr}$
$R_m$ :	Raio médio de entreferro
$R_{rk}$ :	Elemento de resistência da matriz $R_{rr}$ igual a resistência total do rotor relativa a componente simétrica k
$[R_{rr}]$ :	Matriz de resistências dos enrolamentos do rotor em variáveis originais
$R_{rr}$ :	Matriz de resistências dos enrolamentos do rotor em variáveis originais
$R_{rr}$ :	Matriz de resistências do rotor no sistema de componentes simétricas
$R_{rr}$ :	Matriz de resistências do rotor no sistema de coeficientes constantes
$R_{rre}$ :	Matriz de resistências da gaiola externa do rotor em variáveis originais
$R_{rre}$ :	Matriz de resistências da gaiola externa do rotor em variáveis de componentes simétricas
$R_{rrei}$ :	Matriz de resistências mútuas entre as gaiola do rotor de gaiola dupla em variáveis originais
$R_{rrei}$ :	Matriz de resistências mútuas entre as gaiola do rotor de gaiola dupla em variáveis de componentes simétricas

$R_{rri}$ :	Matriz de resistências da gaiola interna do rotor em variáveis originais
$R_{rri}$ :	Matriz de resistências da gaiola interna do rotor em variáveis de componentes simétricas
$R_{rrie}$ :	Matriz de resistências mútuas entre as gaiola do rotor de gaiola dupla em variáveis originais
$R_{rrie}$ :	Matriz de resistências mútuas entre as gaiola do rotor de gaiola dupla em variáveis de componentes simétricas
$R_s$ :	Resistência por fase do estator ou de um enrolamento qualquer do estator
$R_{sa}$ :	Resistência do enrolamento auxiliar do motor monofásico
$R_{sp}$ :	Resistência do enrolamento principal do motor monofásico
$R_{ss}$ :	Matriz de resistências dos enrolamentos do estator em variáveis originais
$R_{ss}$ :	Matriz de resistências do estator no sistema de componentes simétricas
$s$ :	Variável auxiliar inteira usada nas expressões dos grupos de seqüência de $n$
$s$ :	Escorregamento do rotor em relação ao campo girante
$\Delta$ :	Posição linear no arco de contorno do rotor em relação ao eixo do enrolamento 1 do rotor
$S_1$ :	Número de ranhuras do estator
$S_2$ :	Número de ranhuras do rotor
$S_a$ :	Área da seção transversal do anel
$S_b$ :	Área da seção transversal da barra
$S_{e1}$ :	Seção transversal da ranhura do estator
$S_{er}$ :	Seção transversal da ranhura do rotor
$S_r$ :	Área da seção transversal do anel
$t$ :	Tempo
$\mathbf{t}$ :	Vetor unitário tangencial a $\Gamma_k$
$t_1$ :	Largura do dente do estator
$t_2$ :	Largura do dente do rotor
$T_a$ :	O dobro de $T_{a1}$
$T_{a1}$ :	Uma das parcelas do conjugado instantâneo $T_e$ que contribui para o conjugado médio
$T_{a2}$ :	Uma das parcelas do conjugado instantâneo $T_e$ que contribui para o conjugado médio igual a $T_{a1}$ *

Tcorrigido :	Conjugado eletromagnético medido e corrigido pela compensação das perdas rotacionais e no ferro
Te :	Conjugado eletromagnético instantâneo produzido pela máquina
Tea :	Conjugado eletromagnético médio
Tes :	Amplitude do conjugado síncrono
Tev :	Conjugado eletromagnético da harmônica $\nu$
Tm :	Conjugado mecânico exigido pela carga
Tmedido :	Conjugado eletromagnético medido através de ensaio
Tr :	Matriz de transformação das variáveis do rotor do sistema de componentes simétricas para o sistema a coeficientes constantes
Ts :	Matriz de transformação das variáveis do estator do sistema de componentes simétricas para o sistema a coeficientes constantes
Ts1 :	Amplitude de uma das parcelas de conjugado síncrono
Ts2 :	Amplitude de uma das parcelas de conjugado síncrono = Ts1 *
Ts1 :	Conjugado síncrono
$\hat{U}_r$ :	Vetor de tensões do rotor no sistema a coeficientes constantes
$\hat{U}_{re}$ :	Vetor de tensões da gaiola externa do rotor no sistema a coeficientes constantes
$\hat{U}_{ri}$ :	Vetor de tensões da gaiola interna do rotor no sistema a coeficientes constantes
$\hat{U}_{rk}$ :	Elemento do vetor $\hat{U}_r$ que é nulo
$U_s$ :	Vetor de tensão de seqüência positiva = $[V, 0]^t$
$U_s$ :	Potencial escalar igual a $\Phi$ : $\Psi$
$\hat{U}_s$ :	Vetor de tensões do estator no sistema a coeficientes constantes
$\hat{U}_{s1}$ :	Tensão de seqüência positiva do estator no sistema de coeficientes constantes
$\hat{U}_{s2}$ :	Tensão de seqüência negativa do estator no sistema de coeficientes constantes
$\hat{U}_{sa}$ :	Tensão do enrolamento auxiliar no sistema de coeficientes constantes e após a última transformação de componentes simétricas
$\hat{U}_{sp}$ :	Tensão do enrolamento principal no sistema de coeficientes constantes e após a última transformação de componentes simétricas
V :	Tensão eficaz fase-neutro nos terminais da máquina
$[u]$ :	Vetor de tensões nos terminais da máquina em variáveis originais
Va :	Tensão eficaz no enrolamento auxiliar
vc :	Tensão no capacitor do enrolamento auxiliar
vc :	Tensão no capacitor no sistema de componentes simétricas

$V_p$ :	Tensão eficaz no enrolamento principal
$[U_r]$ :	Vetor de tensões do rotor nas variáveis originais
$U_r$ :	Vetor de tensões do rotor em variáveis originais
$V_r$ :	Vetor de tensões do rotor em componentes simétricas
$U_{re}$ :	Vetor de tensões da gaiola externa do rotor em variáveis originais
$V_{re}$ :	Vetor de tensões da gaiola externa do rotor em componentes simétricas
$U_{ri}$ :	Vetor de tensões da gaiola interna do rotor em variáveis originais
$V_{ri}$ :	Vetor de tensões da gaiola interna do rotor em componentes simétricas
$V_{r_k}$ :	Componente simétrica $k$ da tensão do rotor
$[U_s]$ :	Vetor de tensões do estator nas variáveis originais
$U_s$ :	Vetor de tensões do estator nas variáveis originais
$V_s$ :	Vetor de tensões do estator no sistema de componentes simétricas
$V_{s_0}$ :	Tensão de seqüência zero do estator no sistema de componentes simétricas
$V_{s_1}$ :	Tensão de seqüência positiva do estator no sistema de componentes simétricas
$V_{s_2}$ :	Tensão de seqüência negativa do estator no sistema de componentes simétricas
$v_{sa}$ :	Tensão aplicada ao enrolamento auxiliar durante a partida do motor monofásico
$V_{sa}$ :	Tensão aplicada ao enrolamento auxiliar durante a partida do motor em componentes simétricas, igual a $v_{sa}$
$v_{sa}$ :	Tensão da fase $a$ do estator
$v_{sb}$ :	Tensão da fase $b$ do estator
$v_{sc}$ :	Tensão da fase $c$ do estator
$V_{s_k}$ :	Tensão da componente de seqüência $k$ da tensão do estator em componentes simétricas
$v_{sp}$ :	Tensão aplicada ao enrolamento principal
$v_{sp}^+$ :	Componente de seqüência positiva da tensão aplicada ao enrolamento principal
$v_{sp}^-$ :	Componente de seqüência negativa da tensão aplicada ao enrolamento principal
$v_{sp}$ :	Tensão do enrolamento principal em comp. simétricas igual a $v_{sp}$
$v_t$ :	Harmônica da coluna $l=p$

- $w$  : Número de espiras total em série por fase dos enrolamentos do estator  
 $\omega$  : Velocidade de rotação no eixo da máquina  
 $\omega_o$  : Frequência angular relativa entre rotor e estator igual a  $\omega_u - d\omega$   
 $w_{10}$  : Largura da boca da ranhura  
 $w_{11}$  : Largura final da região de abertura da ranhura  
 $w_a$  : Número de espiras total em série do enrolamento auxiliar do estator  
 $w_{er}$  : Espessura do anel  
 $\omega_{l(k)}$  : Frequência angular da indutância da posição  $l(k)$  da matriz  $M_{sr}$  igual a  $\omega_u - \omega L(k)$   
 $w_p$  : Número de espiras total em série do enrolamento principal do estator  
 $\omega_u$  : Frequência angular da rede ou das tensões imposta nos enrolamentos do estator  
 $X$  : Matriz auxiliar de coeficientes numéricos para resistências e indutâncias de dispersão do rotor no sistema de variáveis originais  
 $X$  : Reatância de cabeça de bobina por fase  
 $x$  : Posição angular na superfície de entreferro em relação ao início do enrolamento do estator ou posição em que a componente fundamental de força magnetomotriz se anula  
 $X_{z1}$  : Reatância zig-zag do estator  
 $X_{z2}$  : Reatância zig-zag do rotor  
 $X_m$  : Reatância de magnetização  
 $X_z$  : Reatância zig-zag  
 $Y$  : Matriz auxiliar de coeficientes numéricos para indutâncias próprias e mútuas do rotor no sistema de variáveis originais  
 $y$  : Posição linear na superfície de entreferro em relação ao eixo do enrolamento que produz a força magnetomotriz  
 $z$  : Dimensão vertical (cota)  
 $z_{a_k}$  : Impedância de segmento de anel  $k$   
 $\alpha$  : Posição angular na cabeça de bobina  
 $\alpha_o$  : Número de colunas não nulas à esquerda da coluna  $l=p$  da matriz  $L_{sr}$   
 $\alpha_{al}$  : Coeficiente de temperatura do alumínio  
 $\alpha_{cu}$  : Coeficiente de temperatura do cobre  
 $\beta_o$  : Número de colunas não nulas à direita da coluna  $l=p$  da matriz  $L_{sr}$   
 $\beta_l$  : Ângulo inicial de uma espira de um enrolamento qualquer do estator em relação ao eixo da fase  $a$

$\beta_2$ :	Ângulo final de uma espira de um enrolamento qualquer do estator em relação ao eixo da fase a
$\Gamma_{kj}$ :	Fronteira entre as regiões $\Omega_j$ e $\Omega_k$
$\gamma$ :	Ângulo entre as fases do rotor ou passo angular de cada enrolamento do rotor, é igual a $2\pi/m$
$\gamma_1$ :	Ângulo inicial de um enrolamento qualquer do rotor em relação ao enrolamento 1
$\gamma_2$ :	Ângulo final de um enrolamento qualquer do rotor em relação ao enrolamento 2
$\gamma_{fe}$ :	Massa ou peso específico do ferro
$\gamma_p$ :	Fator para cálculo da resistência dos enrolamentos do estator (1,3 para máquinas de 2 polos, 1,5 para 4 polos e 1,7 para 6 polos)
$\Delta F_{m\text{mar}}$ :	Queda de força magnetomotriz no ar
$\Delta F_{m\text{mfe}}$ :	Queda de força magnetomotriz no ferro
$\Delta F_{m\text{mt}}$ :	Queda de força magnetomotriz total no ar mais no ferro
$\Delta v$ :	Queda de tensão total em um caminho de corrente
$\delta$ :	Comprimento do entreferro
$\delta'$ :	Comprimento do entreferro corrigido pelo fator de Carter
$\Sigma_{jk}$ :	Elemento não nulo da matriz $L_{sr}$ que representa o somatório das componentes harmônicas originais na posição (j,k) de $L_{sr}$
$\epsilon$ :	Ângulo entre as fases do estator ou ângulo de defasagem entre os eixos dos enrolamentos do estator
$\zeta$ :	Profundidade equivalente da barra
$\eta$ :	Posição angular de referência dos enrolamentos do rotor
$\theta_k$ :	Ângulo de $I_r^+$ <sub>k</sub>
$\theta_s$ :	Ângulo da corrente $i_{sp}$
$\lambda$ :	Enlace total de fluxo da cabeça de bobina
$\lambda_1$ :	Passo de ranhura em unidades de comprimento.
$\lambda_p$ :	Passo polar em unidades de comprimento
$\mu_o$ :	Permeabilidade magnética do ar
$\nu$ :	Produto do número de par de pólos pela harmônica n, usado para representar a harmônica n
$\nu_d$ :	Harmônica da coluna lateral do lado direito da matriz $L_{sr}$
$\nu_e$ :	Harmônica da coluna lateral do lado esquerdo da matriz $L_{sr}$
$\nu_k$ :	O mesmo que $\nu$ . O índice k é para ordenar cada valor em uma posição da matriz $L_{sr}$ ou de outra transformada
$\nu_t$ :	Harmônicas da coluna $l=p$ da matriz $L_{sr}$ ou de $M_{sr}$



$\xi$ :	Menor determinação do ângulo de defasagem entre correntes de duas barras vizinhas
$\rho$ :	Operador derivada no tempo igual a $d/dt$
$\rho_a$ :	Resistividade do material do anel
$\rho_{al}$ :	Resistividade do alumínio
$\rho_{cu}$ :	Resistividade do alumínio
$\rho_b$ :	Resistividade do material da barra
$\rho_e$ :	Resistividade do condutor por unidade de comprimento.
$\Phi$ :	Potencial escalar da região $\Omega_j$
$\phi$ :	Posição angular relativa entre estator e rotor tomada entre os eixos das duas primeiras fases de cada estrutura
$\phi_o$ :	Posição angular inicial do rotor
$\phi_k$ :	Igual a $(E_k + d)\phi$
$\phi_r$ :	Posição angular mecânica no rotor em relação ao eixo do enrolamento 1 do rotor
$\phi_s$ :	Posição angular mecânica no estator em relação ao eixo do enrolamento 1 (ou fase a) do estator
$\Psi$ :	Potencial escalar da região $\Omega_k$
$\psi_{rk}$ :	Fluxo total produzido pela corrente de um enrolamento k do rotor
$\psi$ :	Fluxo ou fluxo enlaçado
$\psi_1$ :	Fluxo mútuo de dispersão comum às duas gaiolas da gaiola dupla
$\psi_2$ :	Fluxo de dispersão da gaiola interna
$\psi_3$ :	Fluxo de dispersão da gaiola externa
$\psi_e$ :	Fluxo enlaçado somente no segmento de anel da gaiola externa
$\psi_i$ :	Fluxo enlaçado somente no segmento de anel da gaiola interna
$\psi_{ei}$ :	Fluxo enlaçado com os segmentos de anel das duas gaiolas, externa e interna ou com o segmento do anel comum às duas gaiolas
$\psi_n^j$ :	Componente harmônica de ordem n do fluxo produzido por um enrolamento do estator e enlaçado pelo enrolamento j do rotor
$\psi_n^{jk}$ :	Componente harmônica de ordem n do fluxo produzido pelo enrolamento k do estator e enlaçado pelo enrolamento j do estator
$\psi_n$ :	Componente harmônica de ordem n do fluxo produzido por um enrolamento do estator e enlaçado por uma espira qualquer do estator
$\psi_{rk}$ :	Fluxo total de entreferro criado por um enrolamento k do rotor
$\eta$ :	Posição angular de referência dos enrolamentos do rotor
$\Gamma_{kj}$ :	Fronteira entre as regiões $\Omega_j$ e $\Omega_k$
$\Omega_j$ :	Região de correntes de um problema de campo magnético

- $\Omega_k$  : Região de materiais ferromagnéticos de alta permeabilidade
- $\Omega_r$  : Matriz de escorregamento igual a  $\omega_0 I_{rxr} - \omega E_r$
- $\Omega_s$  : Matriz de escorregamento igual a  $\omega_0 I_{2 \times 2} - \omega E_s$

## RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo sobre modelos matemáticos para máquinas de indução trifásicas de rotor simples, trifásicas de gaiola dupla e monofásicas com enrolamento auxiliar e capacitor de partida. Os modelos desenvolvidos foram elaborados através da teoria de circuitos acoplados, onde são consideradas correntes de malhas para as gaiolas e incluídos efeitos de harmônicas espaciais de força magnetomotriz.

Para as máquinas estudadas, os modelos podem ser aplicados na avaliação de desempenho, em regime permanente ou dinâmico, de máquinas de linha (encontradas no mercado) ou de máquinas em fase de projeto. Ressalta-se como aplicação de grande importância o uso desses modelos na avaliação dos problemas derivados da presença de harmônicas espaciais de força magnetomotriz, tais como: arrastamento na partida, ruído, interferências eletromagnéticas, perdas, etc. Podem ser utilizados também na análise da presença de componentes harmônicas em correntes e forças magnetomotrizes provocadas pelo uso de inversores e controladores eletrônicos no acionamento de motores.

São analisados alguns procedimentos para obtenção de parâmetros das máquinas, onde, além dos formulários tradicionalmente conhecidos, foram investigadas outras formas de cálculo, tais como, técnicas de cálculo de campo por métodos de elementos finitos e outros métodos iterativos mais simples. Para obtenção da reatância de cabeça de bobina, uma nova metodologia, utilizando cálculo de campos tridimensionais foi desenvolvida e avaliada.

A validação do modelo é feita através de comparações entre resultados de simulações e testes em laboratório, sendo ainda o desempenho do modelo proposto comparado ao desempenho de um modelo de Park convencional, para máquinas trifásicas.

## ABSTRACT

This thesis presents a study of mathematical models for three-phase induction machines with single cage, three-phase induction machines with double cage and single-phase induction machines with auxiliary winding and start capacitor. The models were developed according to the theory of coupled circuits, in which were considered mesh currents for cages and the effects of the mmf space harmonics were taken into account as well.

The models developed can be applied in the analysis of the dynamic and steady state performances. An important application is the evaluation of the problems produced by mmf space harmonics, such as crawling, cogging, noise, losses, and electromagnetic interferences. The models can also be used in the analysis of harmonic components in currents and mmf generated by driving motors with electronic inverters and controllers.

An analysis of parameter estimation is presented, in which besides the traditional formulas, other forms of calculation are investigated, such as finite-element field calculation techniques and other simple iterative methods. A methodology for the estimation of winding end impedances using three-dimensional field calculations is developed and evaluated.

The validation of the models is carried out by comparisons between results of simulations and laboratory tests. The performance of the model is also compared with models obtained using conventional Park variable.

## DEDICATÓRIA

Por mais que eu agradeça a grande felicidade que sinto,  
ainda será insuficiente.

Não há palavras que traduzam minha gratidão.

MEISHU-SAMA

Todo o esforço investido neste trabalho e a sua finalização só foram  
possíveis pela permissão do inventor maior.

Ofereço a DEUS este trabalho.

Obrigado.

## AGRADECIMENTOS

Havia escrito um longo texto para este espaço. Nele, justificava os meus agradecimentos e falava também de mágoas que acumulei nesta caminhada. Depois, pensei: por maiores que sejam minhas queixas, ainda seria mais fácil mostrar a minha gratidão pelos que confiaram em mim do que sensibilizar os que em nada me ajudaram.

O meu profundo agradecimento a todos os meus amigos que de alguma forma me ajudaram a chegar ao final deste trabalho.

Jorge Luiz do Nascimento

## AGRADECIMENTOS ESPECIAIS

À UFSC, "um modelo de universidade".

Aos colegas do Depto de Eletrotécnica da UFRJ, pelo apoio recebido.

Ao meu orientador, Prof. Renato Carlson, pelos três primeiros bons anos de amizade.

Aos meus amigos do Curso de Pós-graduação da UFSC, Alunos, Professores e Funcionários, pelo tempo de amizade que juntos passamos. Além dos momentos de trabalho, compartilhamos outros momentos importantes da minha vida.

À minha mãe, ARLETTE e ao pai, MIRINHO, por terem me ensinado a perseguir um ideal.

À minha mulher, SUELY, pela abdicação dos seus sonhos em favor dos meus.

Aos meus filhos, DENISE E FÁBIO, por terem aturado o meu mau humor e os meus defeitos, que se acentuaram mais nesse seis anos. As minhas desculpas, pelo tempo que deveria conviver com eles e fiquei estudando e trabalhando.

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO GERAL

Quando a máquina de indução rotor em gaiola opera com alimentação senoidal, além do campo magnético principal, estão presentes no entreferro alguns outros campos magnéticos, ditos parasitas. O estabelecimento destes campos é atribuído às harmônicas de fmm. Elas possuem origens diversas e quase sempre são consideradas inerentes à própria concepção da máquina. Citam-se, como causas mais freqüentes da formação das harmônicas de fmm, a distribuição dos enrolamentos do estator, o ranhuramento das superfícies de estator e de rotor no entreferro, as irregularidades existentes nestas mesmas superfícies e a saturação magnética do material ferromagnético. Destas, as duas primeiras são as que costumam produzir efeitos mais fortes, sendo por isso, freqüentemente, objetos de análise nos projetos e estudos das máquinas de indução de gaiola. As demais podem ser, em geral, muito atenuadas se alguns cuidados são tomados na operação, nos processos de fabricação e na escolha dos materiais ferromagnéticos empregados.

Assim como o campo fundamental, os campos harmônicos (ou parasitas) produzem correntes e forças. Estas correntes são induzidas no rotor e refletidas para o estator gerando perdas adicionais de energia e componentes de altas freqüências na corrente da linha. As forças ou conjugados eletromagnéticos produzidos pelos campos parasitas terão seus efeitos superpostos ao conjugado fundamental, podendo resultar em problemas na partida da máquina.

Os conjugados parasitas são normalmente classificados pela maioria dos autores (Alger, 1964), (Kostenko e Piostrovsky, 1965) e (Say, 1968) em: conjugados assíncronos ou de indução, conjugados síncronos e conjugados de vibração. As harmônicas espaciais de fmm originadas pela distribuição de enrolamentos e pelo ranhuramento criam campos girantes semelhantes ao fundamental mas com números de pólos maiores e conseqüentemente velocidades mais baixas. Os conjugados assíncronos produzidos por estes campos, durante a partida, podem estabilizar a máquina em uma velocidade próxima a uma fração da velocidade normal de operação. O fenômeno é chamado arrastamento assíncrono. Fenômeno semelhante pode também ocorrer, quando os números de ranhuras de estator e rotor guardam entre si uma relação dada por  $S_1 - S_2 = \pm 2p$ , ou ainda



$S_1=S_2$  (Kostenko e Plostrovsky, 1965) e (Say, 1968). Nesse caso, campos harmônicos, que possuam o mesmo número de pólos, podem entrar em sincronismo, impedindo que a máquina acelere para sua velocidade de funcionamento normal, ou, até mesmo, impedindo a sua partida. Se ela girar a uma velocidade igual a uma fração da velocidade síncrona fundamental, ficará caracterizado o fenômeno do arrastamento síncrono. Com outras relações de números de ranhuras entre estator e rotor, podem surgir os chamados conjugados de vibração. Eles são provenientes das forças de atração entre dentes de estator e de rotor quando posicionados de forma centrada entre si. A medida que o rotor gira, essas forças também giram a uma velocidade específica e produzem vibrações mecânicas e, conseqüentemente, ruídos nesta estrutura.

A maioria das máquinas de indução são fabricadas com alguns cuidados para atenuar os efeitos destes campos harmônicos. Em geral, adota-se uma combinação adequada de ranhuras e uma inclinação das ranhuras de estator ou de rotor para evitar a formação de conjugados síncronos, reduzir consideravelmente os conjugados de vibração e ainda os ruídos provocados por estes. São também tomadas medidas para atenuar os conjugados de indução, tais como: a distribuição planejada dos enrolamentos do estator e o uso de passos fracionários nesses enrolamentos.

De qualquer forma, as harmônicas de fmm, quando presentes, são produzidas essencialmente pela distribuição dos enrolamentos e acentuadas ainda mais pelo ranhuramento mútuo entre estator e rotor. Por este motivo, no projeto de uma nova máquina ou na análise de funcionamento de máquinas comerciais, sob formas de acionamentos especiais, é recomendável examinar os efeitos das harmônicas espaciais de fmm.

A máquina de indução pode ser estudada através de circuitos equivalentes ou por equações de circuitos acoplados. As duas metodologias costumam dar bons resultados para estudos de regime permanente ou dinâmico e podem ser empregadas para análise de simulações, que incluam efeitos de harmônicas e suas conseqüências.

Os modelos de circuitos equivalentes, quando empregados em simulações de regime dinâmico, utilizam equações diferenciais em função dos fluxos, obtendo-se características de desempenho com boa representatividade. Nestes modelos, os efeitos das harmônicas espaciais de força magnetomotriz devidos à distribuição dos enrolamentos são de difícil representação, resultando em circuitos excessivamente complicados. Assim, quando se deseja estudar tais efeitos com maior nível de detalhes, deve-se utilizar modelos baseados em circuitos acoplados, que permitem a inclusão de ordens elevadas de harmônicas, sem exigir uma maior complexidade na solução das equações.

Modelos baseados exclusivamente em circuitos equivalentes foram muito utilizados para análise dos fenômenos provenientes das harmônicas de força magnetomotriz (Agarwall, 1960), (Christofides, 1965), (Burbidge e Fryett, 1967), (Davis, 1969 e 1971) e (Barton, 1969). Entretanto, outros estudos elaborados através de circuitos equivalentes abordaram, também, aspectos fundamentais do desenvolvimento de modelos de circuitos acoplados com harmônicas de fmm. Neste caso, se enquadra a representação das correntes de gaiola por equações de malhas, na forma utilizada nos trabalhos de Middendorf (1962) e de Wallace e Wright (1973), consolidados mais recentemente nos artigos de Hommes e Paap (1984).

Robinson (1964) desenvolveu expressões para determinação das indutâncias relacionadas às harmônicas espaciais de força magnetomotriz e Barton (1972) apresentou metodologia relacionada à teoria de circuitos acoplados, inclusive aplicando a transformação em componentes simétricas e derivando os circuitos de seqüências associados. A simulação do desempenho da máquina com base no modelo discutido não foi, entretanto, representada no seu trabalho.

Davis (1969 e 1971) elaborou toda uma estrutura matricial de parâmetros, relacionada com a teoria de circuitos acoplados, incluindo a representação de harmônicas para máquinas monofásicas e trifásicas. Não obstante, sua modelagem final de trabalho é apresentada na forma de circuitos equivalentes.

Finalmente, Rogers (1979) propôs uma estrutura para a matriz de indutâncias mútuas, tendo como ponto forte a representação de um espectro considerável de harmônicas espaciais de fmm. Seu trabalho também foi baseado na teoria de circuitos acoplados, sendo utilizado como referência em estudos posteriores (Hommes e Paap, 1984), (Drozdowsky e Sobczyk, 1987), (Rusck, 1988), (Sobczyk e Weinreb, 1988) e (Paap, 1991).

A modelagem da máquina de indução trifásica apresentada no presente trabalho tem como ponto de partida os estudos de Drozdowski e Sobczyk (1987). O modelo estudado permite realizar o cálculo das correntes da gaiola sem fazer uso de enrolamentos equivalentes ou grandezas referidas. Todas as correntes e tensões são acessíveis nas equações do modelo. Os conjugados harmônicos (parasitas) e as perdas a eles associadas podem ser calculados isoladamente. O modelo pode ser utilizado para estudos de problemas na partida de motores de indução relacionados com harmônicas espaciais de fmm.

No Capítulo II, o sistema de equações nas variáveis originais é estabelecido, de forma generalizada. A partir das componentes harmônicas de fluxo, as expressões das indutâncias são desenvolvidas e os elementos das matrizes do sistema são definidos. Enquanto os enrolamentos do estator são representados na forma convencional, a modelagem da gaiola do rotor é feita de

forma semelhante e baseada nas equações de malhas, cujas correntes são as próprias correntes dos segmentos de anel. As indutâncias e as equações elétricas são definidas segundo a teoria de circuitos acoplados.

No Capítulo III são usadas transformações de componentes simétricas para o estator e para o rotor. Essas transformações diagonalizam as matrizes próprias das estruturas, produzindo, em geral, uma matriz de acoplamento entre elas contendo muitas colunas nulas e reduzindo a ordem do sistema a ser resolvido. Além disso, as ordens harmônicas são separadas nas posições da matriz de mútuas, de acordo com os grupos de seqüências, relacionados aos sistemas trifásico do estator e m-fásico do rotor. Isto permite utilizar, somente, o primeiro elemento de cada série e ao mesmo tempo manter a representação de harmônicas com ordens elevadas.

No Capítulo IV, uma nova transformação de variáveis é aplicada ao sistema de equações. Consiste em uma transformação, do tipo complexa, específica para esse estudo e que tem como objetivo obter matrizes com coeficientes constantes. As equações, matrizes e formas das funções das variáveis resultantes das transformações, são interpretadas fisicamente de acordo com os fenômenos envolvidos nas equações da máquina.

No Capítulo V, o modelo é estendido para a máquina de indução monofásica com enrolamento auxiliar de partida. São estabelecidos modelos para regime permanente e para regime dinâmico. A modelagem do rotor é semelhante à da máquina trifásica, onde o estator é modelado para regime dinâmico, usando-se as equações dos dois enrolamentos e a equação do capacitor. As transformações de variáveis aplicadas são particularizadas para o caso.

No Capítulo VI, o modelo da máquina trifásica é expandido para máquinas de dupla gaiola. As transformações utilizadas são rigorosamente as mesmas da máquina de rotor simples e os resultados são obtidos por analogia e análise dos fenômenos eletromagnéticos envolvidos.

O Capítulo VII é reservado a uma análise dos parâmetros, onde são apresentadas as fórmulas utilizadas para as resistências e indutâncias de dispersão. É discutida a alternativa do uso de métodos numéricos (Elementos Finitos) de cálculo de campos magnéticos para determinação das indutâncias e é apresentada uma metodologia para cálculo da indutância de cabeça de bobina, utilizando cálculo de campos tridimensionais.

Apesar de se tratar de modelos de circuitos acoplados, os fluxos de dispersão e suas indutâncias associadas são tratados com destaque, habilitando o modelo a estudos de desenvolvimento de projetos.

As fórmulas para as indutâncias próprias e mútuas deduzidas levam em conta a queda de fmm na estrutura ferromagnética, sendo possível considerar a

saturação magnética. Usa-se, para isso, o fator de saturação que pode ser variável nos programas de simulações desenvolvidos.

O ranhuramento é considerado apenas na correção de entreferro, não sendo incluído os seus efeitos nas harmônicas espaciais de fmm. O fator de Carter é, então, empregado no cálculo da indutância de magnetização.

Finalmente, são realizadas simulações em regime permanente e dinâmico com base nos modelos apresentados, sendo os resultados comparados com outros obtidos por ensaios e por uso do modelo convencional.

## CAPÍTULO II

### ESTRUTURA DA MÁQUINA DE INDUÇÃO E SUAS EQUAÇÕES ORIGINAIS

#### II.1 Estrutura da Máquina

No presente trabalho, a máquina de indução com rotor de gaiola é estudada através de equações de circuitos acoplados, onde o rotor é configurado por correntes de malhas ou de segmentos de anel (Wallace e Wright, 1973), (Drozdowsky e Sobczyk, 1987) e (Paap, 1991). Nesta configuração, os enrolamentos do estator são tratados de maneira clássica, relacionando-se tensões e correntes através das malhas definidas pelos enrolamentos. Para que o rotor receba o mesmo tratamento, seus enrolamentos devem ser definidos por espiras fictícias, formadas pelos caminhos das correntes de segmento de anel. Esses caminhos são estabelecidos através de duas barras e dos dois segmentos de anel existentes entre elas (Figura II.1). Dessa forma, cada espira define um enrolamento e, também, uma fase, ficando o número total de fases igual ao número de barras da gaiola.

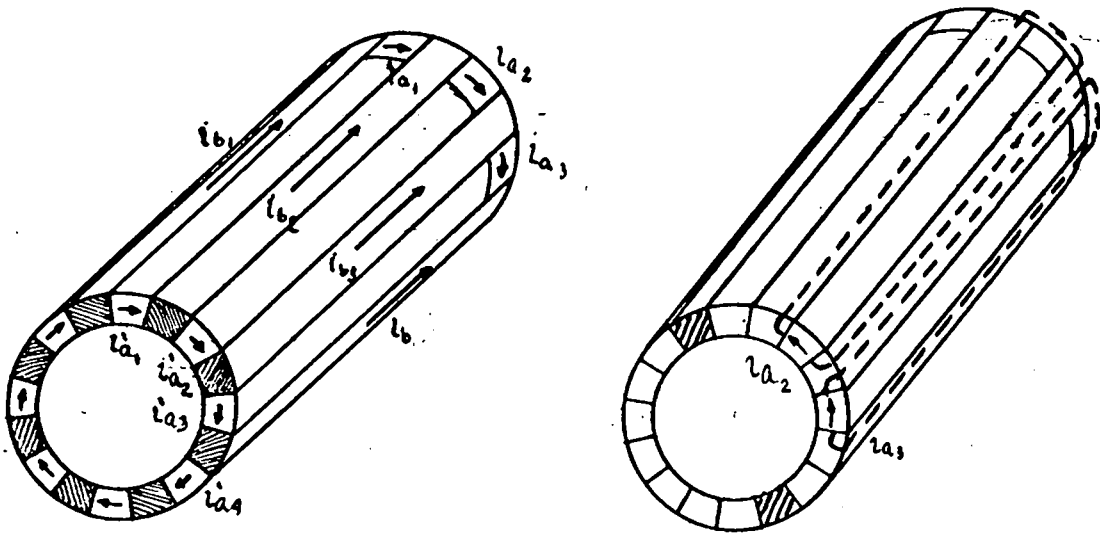


Figura II.1 Enrolamentos definidos como caminhos de correntes.





## II.2 Sistema de Equações Representativas da Máquina

As tensões aplicadas aos enrolamentos de estator e rotor da máquina podem ser expressas em função das correntes, em uma forma matricial e compacta como:

$$[u] = [R][i] + d/dt [L][i]. \quad (II.7)$$

O vetor de tensões  $[u]$  é composto pelas tensões dos enrolamentos de estator e de rotor, podendo ser escrito da seguinte forma:

$$[u] = \begin{bmatrix} u_s \\ u_r \end{bmatrix}, \quad (II.8)$$

onde:  $[u_s] = \begin{bmatrix} v_{sa} \\ v_{sb} \\ v_{sc} \end{bmatrix},$

sendo  $v_{sa}$ ,  $v_{sb}$ ,  $v_{sc}$  as tensões aplicadas nos enrolamentos do estator da máquina e no caso de tensões de fases equilibradas, tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_{sa} \\ v_{sb} \\ v_{sc} \end{bmatrix} = \sqrt{2} V \begin{bmatrix} \cos(\omega_s t) \\ \cos(\omega_s t - 2\pi/3) \\ \cos(\omega_s t + 2\pi/3) \end{bmatrix}, \quad (II.9)$$

sendo  $V$  o valor eficaz da tensão fase-neutro da máquina e, na hipótese de utilização de rotor tipo gaiola,

$$[u_r] = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^t, \text{ com } m \text{ elementos.} \quad (II.10)$$

De forma análoga, as correntes são representadas por:

$$[i] = \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}, \quad (II.11)$$

onde:  $[i_s] = \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix}$  e (II.12)

$$[i_r] = [i_{r_1} \ i_{r_2} \ i_{r_3} \ \dots \ i_{r_m}]^t, \quad (II.13)$$



sendo  $i_{sa}$ ,  $i_{sb}$  e  $i_{sc}$  as correntes nos terminais da máquina e  $i_{r1}$ ,  $i_{r2}$ , ...,  $i_{rm}$  as correntes nos enrolamentos do rotor, definidos pelas malhas referidas na Figura II.2.

Nestas expressões que relacionam as correntes e as tensões nos enrolamentos devem ainda ser consideradas as perdas nos circuitos magnéticos, a curva de magnetização do material ferromagnético utilizado na máquina, as equações e os parâmetros mecânicos, as expressões dos elementos das matrizes (resistências e indutâncias) e a expressão do conjugado eletromagnético produzido pela máquina, mostrado a seguir:

$$T_e = \frac{1}{\omega} \frac{d}{d\phi} [L_{sr}] i_r. \quad (II.14)$$

### II.2.1 Distribuição de Fluxos e Indutâncias

De maneira usual, o fluxo é visualizado como resultante da contribuição do fluxo de entreferro e de outras parcelas de fluxos de dispersão que não atravessam o entreferro. É uma metodologia empregada na maioria dos trabalhos que tratam do assunto (Kostenko e Piotrovsky, 1969), (Smolensky, 1982), (Hommes e Paap, 1984), (Drozdowsky e Sobczyk, 1987) e (Kassick, 1990).

A dispersão de fluxo é tratada de forma localizada, calculando-se, separadamente, indutâncias de dispersão de ranhuras, indutância de dispersão zig-zag e indutâncias de dispersão de cabeça de bobina. As fórmulas utilizadas para cálculo destes parâmetros, bem como os métodos alternativos investigados são apresentados no escopo do Capítulo VII.

As expressões para cálculo de indutâncias relativas ao fluxo de entreferro são deduzidas nas seções seguintes. Parte-se da força magnetomotriz produzida nos enrolamentos (distribuídos ou concentrados), calcula-se a distribuição de fluxo no entreferro e os fluxos enlaçados, determinando-se as indutâncias correspondentes.

### II.2.2 Indutâncias Mútuas Entre Estator e Rotor

A onda de força magnetomotriz produzida por um enrolamento localizado no estator (Figura II.3), seja do tipo concentrado ou distribuído, pode ser expressa pela série:

$$f_{mm}(x) = \sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{\infty} A_n \sin nx, \quad (II.15)$$

onde:  $n$  é a ordem da harmônica,

$x$  é a coordenada angular em relação à posição em que a componente fundamental de força magnetomotriz se anula e

$$A_n = \frac{C K_{wn} i_s}{n \pi p}, \quad (\text{II.16})$$

sendo:  $C$  o número total de condutores em série por fase,

$K_{wn}$  é o fator de enrolamento correspondente à harmônica de ordem  $n$ ,

$i_s$  a corrente no enrolamento do estator e

$p$  o número de par de pólos da máquina.

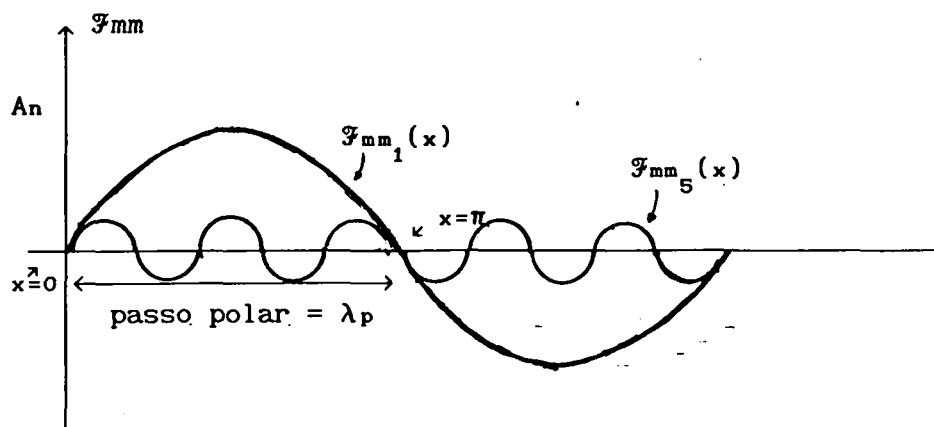


Figura II.3 Componente fundamental e de 5ª harmônica da onda de força magnetomotriz de um enrolamento do estator.

A distribuição de fluxo no entreferro da máquina, correspondente a esta onda de força magnetomotriz (Figura II.4), pode ser representada pela densidade de fluxo em função da posição linear no entreferro. Ela é representada por uma série de harmônicas com termo geral:

$$B_n(y) = \frac{\mu_0 A_n}{\delta} \sin \frac{n \pi}{2} \cos \frac{n \pi y}{\lambda_p}, \quad (\text{II.17})$$

onde:  $\mu_0$  é a permeabilidade do ar,

$\delta$  é o comprimento do entreferro,

$y$  é a posição linear no entreferro em relação ao eixo do enrolamento

que produz a força magnetomotriz e  
 $\lambda_p$  é o passo polar em unidades de comprimento.

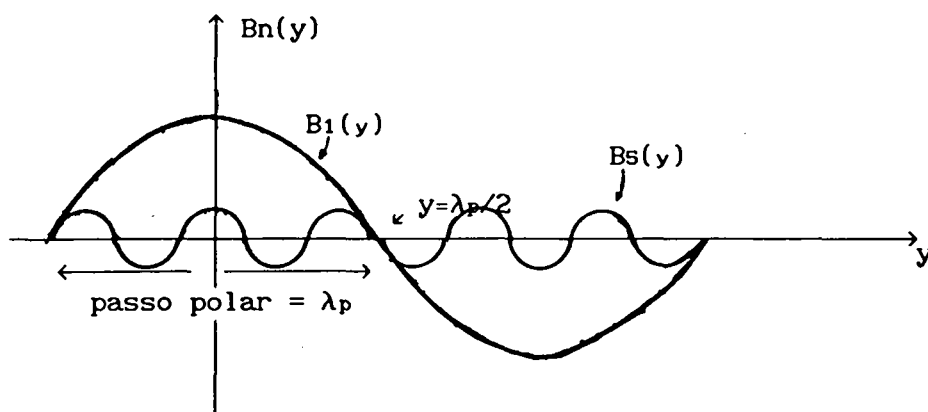


Figura II.4 Distribuições da densidade de fluxo relativas às componentes fundamental e de 5ª harmônica

A componente harmônica da densidade de fluxo produzida pela fase  $k$  do estator, em uma posição angular  $\phi_s$  em relação ao eixo da fase 1 (ou  $a$ ), pode ser representada pela expressão:

$$B_n^k = B_n \cos n(p\phi_s - (k-1)\epsilon), \quad (\text{II.18})$$

onde:  $B_n$  é o valor de pico da densidade de fluxo, igual a  $\frac{\mu_0 A n}{\delta} \sin \frac{n\pi}{2}$ ,  
 $\phi_s$  é o ângulo mecânico em relação ao eixo do enrolamento 1 (ou fase  $a$ ) do estator e  
 $\epsilon$  é o ângulo de defasagem entre os eixos dos enrolamentos do estator.

O fluxo distribuído no entreferro e produzido pela fase  $k$  do estator, correspondente a uma componente harmônica, é enlaçado pelos enrolamentos do rotor. O fluxo enlaçado pelo enrolamento  $j$  do rotor, que fica entre as barras  $j$  e  $j+1$  e os segmentos de anel entre elas, é:

$$\psi_n^j = 1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} B_n^k d\alpha, \quad (\text{II.19})$$

onde:  $l$  a dimensão da máquina no sentido do eixo e

$\Delta$  é a posição linear em um arco de contorno do rotor,

sendo:  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  as respectivas posições das barras  $j$  e  $j+1$ .

Como  $\Delta$  pode ser expresso em função do raio médio do entreferro  $R$ , tem-se:

$$\Delta = R \phi_r \quad e \quad (II.20)$$

$$\psi_n^j = \frac{\mu_o An}{\delta} \sin \frac{n \pi}{2} l R \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \cos n(p\phi_s - (k-1)\epsilon) d\phi_r, \quad (II.21)$$

onde  $\phi_r$  é a posição angular mecânica no rotor em relação ao eixo do enrolamento 1 do rotor e

$\gamma_1 = (j-3/2)\gamma$  e  $\gamma_2 = (j-1/2)\gamma$  são as posições angulares correspondentes às posições lineares  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ ,

sendo  $\gamma = 2\pi/m$  o passo angular de cada enrolamento do rotor.

Se  $\phi$  é a posição angular mecânica relativa entre estator e rotor, tomada entre os eixos dos dois primeiros enrolamentos de cada peça,  $\phi_s$  pode ser substituído por  $\phi_r + \phi$  na integral dada em (II.21), resultando na seguinte expressão:

$$\psi_n^j = \frac{\mu_o An}{\delta} \sin \frac{n \pi}{2} l R \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \cos n(p\phi_r + p\phi - (k-1)\epsilon) d\phi_r. \quad (II.22)$$

Resolvendo-se a integração escreve-se:

$$\psi_n^j = \frac{l R Bn}{n p} \sin n(p\phi_r + p\phi - (k-1)\epsilon) \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Rightarrow \quad (II.23)$$

$$\psi_n^j = \frac{l R \mu_o An}{n p \delta} \sin \frac{n \pi}{2} \left\{ \sin n(p\phi + p\gamma_2 - (k-1)\epsilon) - \sin n(p\phi + p\gamma_1 - (k-1)\epsilon) \right\} \quad (II.24)$$

Substituindo-se as expressões de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  na Equação (II.24), tem-se:

$$\psi_n^j = \frac{1}{n} \frac{R}{p} \frac{\mu_0}{\delta} \frac{A n}{\delta} \sin \frac{n \pi}{2} \left\{ \sin n(p\phi + p(j-1)\gamma + 1/2p\gamma - (k-1)\epsilon) - \right. \\ \left. \sin n(p\phi + p(j-1)\gamma - 1/2p\gamma - (k-1)\epsilon) \right\} \quad (\text{II.25})$$

ou 
$$\psi_n^j = \frac{2}{n} \frac{1}{p} \frac{R}{\delta} \frac{\mu_0}{\delta} \frac{A n}{\delta} \sin \frac{n \pi}{2} \left\{ \cos n(p\phi + p(j-1)\gamma - (k-1)\epsilon) \right\} \sin \frac{np\gamma}{2} \quad (\text{II.26})$$

Como na máquina trifásica  $\epsilon = 2\pi/3$  e  $\gamma = 2\pi/m$ , tem-se:

$$\psi_n^j = \frac{2}{n} \frac{1}{p} \frac{R}{\delta} \frac{\mu_0}{\delta} \frac{A n}{\delta} \sin \frac{n \pi}{2} \sin \frac{np\pi}{m} \cos n(p\phi + p(j-1)2\pi/m - (k-1)2\pi/3) \quad (\text{II.27})$$

Substituindo-se a expressão de  $A n$  em (II.27), tem-se :

$$\psi_n^j = \frac{2}{\delta} \frac{\mu_0}{\pi} \frac{1}{n^2} \frac{R}{p^2} \frac{C}{n} \frac{K_{wn}}{p} i_{s_k} \sin \frac{n \pi}{2} \sin \frac{np\pi}{m} \cos n(p\phi + p(j-1)\gamma - (k-1)\epsilon) \quad (\text{II.28})$$

A indutância mútua entre os enrolamentos  $j$  do rotor e  $k$  do estator, relativas à componente harmônica de ordem  $n$  do fluxo, é igual à razão entre o fluxo enlaçado pelo enrolamento  $j$  e a corrente do enrolamento  $k$  que produz o fluxo, ou seja:

$$L_{sr_n}^{jk} = \frac{\psi_n^j}{i_{s_k}} = L_{sr_n} \cos n(p\phi + p(j-1)2\pi/m - (k-1)2\pi/3), \quad (\text{II.29})$$

onde: 
$$L_{sr_n} = \frac{4}{\pi} \frac{\mu_0}{\delta} \frac{1}{n^2} \frac{R}{p^2} \frac{w}{p} \frac{K_{wn}}{p} \sin \frac{n \pi}{2} \sin \frac{np\pi}{m} \quad (\text{II.30})$$

$w$  é o número de espiras em série por fase do estator.

Pode-se escrever, finalmente que:

$$Lsr_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} Lsr_n^{jk}, \text{ para } n \text{ ímpar} \quad (II.31)$$

### II.2.3 Indutâncias do Estator.

Define-se para o estator, indutâncias devido ao fluxo de entreferro separadamente das indutâncias de dispersão. Calcula-se parcelas de indutâncias próprias das fases e indutâncias mútuas entre fases. As fórmulas para cálculos destas indutâncias podem ser obtidas por processo semelhante ao adotado no item anterior para cálculo das indutâncias mútuas entre estator e rotor, sendo encontradas em muitas das referências utilizadas neste trabalho.

Por força de verificação, pode-se obtê-las a partir da Equação (II.19), calculando-se o fluxo enlaçado por uma espira qualquer do estator. A integração é realizada em relação a posições angulares no estator, da seguinte forma:

$$\psi_n = \frac{\mu_o An}{\delta} \sin \frac{n\pi}{2} I R \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos n(p\phi_s - (k-1)\epsilon) d\phi_s, \quad (II.32)$$

onde  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são ângulos de posicionamento de uma espira de um enrolamento  $j$  qualquer do estator que enlaça o fluxo produzido pelo enrolamento  $k$  do estator.

Resolvendo-se a integração, tem-se:

$$\psi_n = \frac{1}{n} \frac{R \mu_o An}{p \delta} \sin \frac{n\pi}{2} \left\{ \sin n(p\beta_2 - (k-1)\epsilon) - \sin n(p\beta_1 - (k-1)\epsilon) \right\} \quad (II.33)$$

Considerando-se  $\beta_2 = \eta + \beta/2$  e  $\beta_1 = \eta - \beta/2$ , a expressão resultante será semelhante à expressão mostrada em (II.28), sendo que o fator  $\sin \frac{np\pi}{m}$  é substituído por  $\sin \frac{np\beta}{2}$ , que multiplicado por  $\sin \frac{n\pi}{2}$  representa o fator de passo  $K_{pn}$  da espira e da bobina a que ela pertence, o ângulo mecânico  $\beta/2$  se refere à largura das espiras da bobina considerada e,  $p\eta - (k-1)\epsilon$  é a posição angular (em rd ou graus elétricos) do eixo da espira em relação ao eixo da fase  $k$ . Desta forma, o fator  $\cos n(p\phi + p(j-1)\gamma - (k-1)\epsilon)$ , da Expressão (II.28), é substituído por  $\cos n(p\eta - (k-1)\epsilon)$  e, levando-se em consideração o

número de espiras e os deslocamentos angulares das bobinas, a expressão final do fluxo total produzido pelo enrolamento  $k$  e enlaçado pelo enrolamento  $j$  do estator será dada por:

$$\psi_n^{jk} = \frac{2 \mu_0 l R C K_{wn}}{\delta \pi n^2 p^2} i s_k K_{pn} K_{dn} \cos(n(k-j)2\pi/3), \quad (\text{II.34})$$

onde  $K_{dn}$  é o fator de distribuição das bobinas no enrolamento que enlaça o fluxo e que surge no cálculo do enlace total devido às defasagens espaciais entre as bobinas.

As expressões para as indutâncias de entreferro do estator podem ser obtidas através da divisão da expressão do fluxo enlaçado, da Equação (II.34) pela corrente do enrolamento que produz o fluxo. No cálculo das contribuições dos fluxos de entreferro para as indutâncias próprias utiliza-se  $j=k$  e, no cálculo das indutâncias mútuas entre enrolamentos de estator toma-se  $j \neq k$ , com  $j$  e  $k$  variando entre 1 e 3 (ou  $a$ ,  $b$  e  $c$ ).

$$L_{sa} = L_{sb} = L_{sc} = \sum_{n=1}^{\infty} l s_n, \text{ para } n \text{ ímpar}, \quad (\text{II.35})$$

$$L_{sab} = L_{sbc} = L_{sca} = \sum_{n=1}^{\infty} l s_n \cos(n2\pi/3) \quad (\text{II.36})$$

$$\text{onde } l s_n = \frac{4 \mu_0 l R}{\pi \delta} \left( \frac{w K_{wn}}{p n} \right)^2. \quad (\text{II.37})$$

#### II.2.4 Indutâncias do Rotor

Como o rotor é constituído por barras, não é possível, simplesmente, usar fórmulas análogas às do estator.

Na Figura II.5 são representados o entreferro e as superfícies do rotor e do estator planificadas. O fluxo produzido pela corrente de um dos enrolamentos, como definido no item II.1, se distribui ao longo do entreferro, enlaçando os outros enrolamentos do rotor. Se a permeabilidade do ferro é considerada infinita, toda a queda de força magnetomotriz se concentrará no entreferro da máquina.

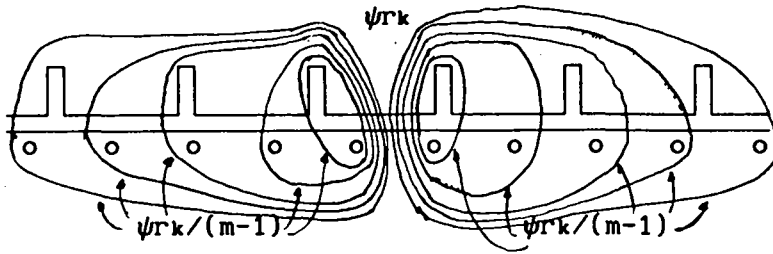


Figura II.5 Superfícies de entreferro.

A força magnetomotriz produzida é igual à corrente do enrolamento que a produz.

$$f_{mm} = i r_k = i a_k, \quad (II.38)$$

onde  $k$  é o índice do enrolamento e  $i a_k$  é uma corrente de segmento de anel.

Esta força magnetomotriz se distribui nos caminhos de ida e volta no entreferro da máquina. Então:

$$i r_k = H_1 \delta + H_2 \delta, \quad (II.39)$$

onde:  $H_1$  é a queda de força magnetomotriz no entreferro, no caminho do fluxo total do rotor para o estator e

$H_2$  é a queda de força magnetomotriz no entreferro, em um caminho alternativo de fluxo do estator para o rotor.

O fluxo que passa do rotor para o estator é o fluxo total  $\psi_{rk}$  produzido pelo enrolamento  $k$  e a densidade média de fluxo na superfície contornada pelo enrolamento é igual a:

$$B_1 = \frac{\psi_{rk}}{A_1} = \frac{\psi_{rk}}{(2\pi R l)/m} \quad (II.40)$$

O fluxo em um dos caminhos alternativos, que passa do estator para o rotor, é igual ao fluxo total dividido pelo número de caminhos alternativos e a densidade média de fluxo na superfície média de entreferro é:

$$B_2 = \frac{\psi_{rk}/(m-1)}{A_1} = \frac{\psi_{rk} m}{2\pi R l (m-1)} \quad (II.41)$$



Assim:

$$i r_k = \frac{B_1 \delta}{\mu_0} + \frac{B_2 \delta}{\mu_0} = \frac{\delta \psi_{rk} m}{\mu_0 2\pi R l} \left[ 1 + \frac{1}{m-1} \right] \quad (II.42)$$

ou

$$i r_k = \frac{\delta \psi_{rk} m^2}{\mu_0 2\pi R l (m-1)} \quad (II.43)$$

A contribuição de fluxo através do entreferro para a indutância própria de um enrolamento do rotor  $L_{rk}$  e a indutância mútua entre enrolamentos do rotor  $L_{jk}$ , são dadas por:

$$L_{rk} = \frac{\psi_{rk}}{i r_k} = \frac{\mu_0 2\pi R l (m-1)}{\delta m^2} = (m-1)L_r \quad (II.44)$$

$$L_{jk} = \frac{\psi_{rj}}{i r_k} = \frac{-\psi_{rk}/(m-1)}{i r_k} = - \frac{\mu_0 2\pi R l}{\delta m^2} = - L_r \quad (II.45)$$

### II.2.5 Matrizes de Resistências e de Indutâncias.

O sistema de equações apresentado em (II.7) pode ser escrito de forma mais detalhada (Equação II.46) com as variáveis de estator e de rotor separadas. Destacam-se, desta forma, as matrizes próprias das duas estruturas e as matrizes mútuas entre elas.

$$\begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss} & 0 \\ 0 & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}, \quad (II.46)$$

Para complementar a representação do sistema de equações é necessário explicitar as matrizes envolvidas em (II.46).

**Matrizes do estator:**

$$R_{ss} = \text{diag} [R_s \ R_s \ R_s], \quad (II.47)$$

$L_{ss}$  é obtida pela organização matricial das expressões das indutâncias próprias e mútuas apresentadas nas Equações (II.35) e (II.36) somadas às parcelas de dispersão representadas por  $l_{sd}$ :

$$\mathcal{L}_{ss} = \begin{bmatrix} l_{sd} & & \\ & l_{sd} & \\ & & l_{sd} \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} l_{sn} \begin{bmatrix} 1 & \cos n 2\pi/3 & \cos n 4\pi/3 \\ \cos n 4\pi/3 & 1 & \cos n 2\pi/3 \\ \cos n 2\pi/3 & \cos n 4\pi/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad n \text{ ímpar} \quad (\text{II.48})$$

### Matrizes do rotor:

Como os enrolamentos do rotor são caminhos formados por segmentos de anel e barras, as resistências e indutâncias de dispersão totais de cada fase deverão ser combinações das resistências e indutâncias das barras e dos segmentos de anel. Estas combinações podem ser determinadas, escrevendo-se as equações da máquina relativas ao rotor:

$$0 = [R_{rr}][i_r] + d/dt \left\{ [\mathcal{L}_{rr}][i_r] + [\mathcal{L}_{rs}][i_s] \right\}. \quad (\text{II.49})$$

Extraí-se de (II.49), a equação correspondente ao enrolamento j:

$$\begin{aligned} 0 = d/dt \left\{ \left[ \sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{\infty} L_{sr_n} (\cos n [p\phi + (j-1)p 2\pi/m]) \right] i_{sa} + \right. \\ \left[ \sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{\infty} L_{sr_n} (\cos n [p\phi + (j-1)p 2\pi/m - 2\pi/3]) \right] i_{sb} + \\ \left. \left[ \sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{\infty} L_{sr_n} (\cos n [p\phi + (j-1)p 2\pi/m - 4\pi/3]) \right] i_{sc} \right\} + \\ d/dt \left\{ L_r (m-1) i_{r_j} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m L_r i_{r_k} + \sum_{k=1}^m L_{jk} i_{r_k} \right\} + \sum_{k=1}^m R_{jk} i_{r_k} \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

Devem ser analisados somente os termos da Equação (II.50) que envolvem as correntes do rotor, correspondentes a:

$$\Delta v = d/dt \left\{ L_r (m-1) i_{r_j} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m L_r i_{r_k} + \sum_{k=1}^m L_{jk} i_{r_k} \right\} + \sum_{k=1}^m R_{jk} i_{r_k} \quad (\text{II.51})$$

As quedas de tensão na Expressão (II.51) relativas às resistências e indutâncias de dispersão, devem corresponder às quedas existentes no caminho da corrente do enrolamento  $j$ . O enrolamento  $j$  do rotor é o caminho da corrente de segmento de anel  $ia_j$ , que percorre as barras  $j$  e  $j+1$ , além dos dois segmentos de anel entre elas. Desta forma, as quedas de tensão resultantes de resistências e de indutâncias de dispersão são equacionadas como segue:

$$\Delta v = (ra + d/dt la)ia_j + (rb + d/dt lb)ib_j + (ra + d/dt la)ia_{j+1} - (rb + d/dt lb)ib_{j+1} \quad (II.52)$$

As quedas de tensão nos segmentos de anel são provocadas apenas pela corrente  $ia_j$  e nas barras fluem correntes de dois segmentos de anéis vizinhos, por isso tem-se quedas de tensão relativas às correntes  $ia_{j-1}$  e  $ia_{j+1}$  (Figura II.2).

Substituindo-se na Equação (II.52),  $ib_j$  por  $ia_j - ia_{j-1}$  e  $ib_{j+1}$  por  $ia_{j+1} - ia_j$ , obtém-se a seguinte relação:

$$\Delta v = - (rb + d/dt lb)ia_{j-1} + \left[ (2ra + 2rb) + d/dt(2la + 2lb) \right] ia_j - (rb + d/dt lb)ia_{j+1} \quad (II.53)$$

Retornando-se à Equação (II.50) com a nova expressão de  $\Delta v$ , as equações do rotor ficarão escritas da seguinte forma:

$$0 = -rb \, ir_{j-1} + (2ra + 2rb) \, ir_j - rb \, ir_{j+1} +$$

$$d/dt \left\{ \left[ \sum_{n=1, \text{ ímpar}}^{\infty} Lsrn (\cos n[p\phi + (j-1)p2\pi/m]) \right] isa + \right.$$

$$\left. \left[ \sum_{n=1, \text{ ímpar}}^{\infty} Lsrn (\cos n[p\phi + (j-1)p2\pi/m - 2\pi/3]) \right] isb + \right.$$

$$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} L_{srn} (\cos n[p\phi + (j-1)p \frac{2\pi}{m} - 4\pi/3]) \right] i_{sc} \Big\} +$$

$$d/dt \left\{ L_{r(m-1)} i_{r_j} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^m L_r i_{r_k} - l_b i_{r_{j-1}} + (2l_a + 2l_b) i_{r_j} - l_b i_{r_{j+1}} \right\}$$
(II.54)

Com isso as matrizes  $\mathcal{R}_{rr}$  e  $\mathcal{L}_{rr}$  tomam as seguintes formas:

$$\mathcal{R}_{rr} = \begin{bmatrix} 2r_a + 2r_b & -r_b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -r_b \\ -r_b & 2r_a + 2r_b & -r_b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -r_b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -r_b & 2r_a + 2r_b \end{bmatrix}$$
(II.55)

$$\mathcal{L}_{rr} = \begin{bmatrix} 2l_a + 2l_b & -l_b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -l_b \\ -l_b & 2l_a + 2l_b & -l_b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -l_b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -l_b & 2l_a + 2l_b \end{bmatrix} +$$

$$L_r \begin{bmatrix} m-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & m-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & m-1 \end{bmatrix}$$
(II.56)

#### Matrizes mútuas entre estator e rotor:

São só matrizes de indutâncias mútuas  $\mathcal{L}_{sr}$  e  $\mathcal{L}_{rs}$ . Elas são estruturadas a partir das expressões dadas em (II.29), (II.30) e (II.31).

$$\mathcal{L}_{sr} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} L_{srn} \begin{bmatrix} \cos n p \phi & \cos n(p\phi + p\gamma) & \dots & \cos n(p\phi + p(m-1)\gamma) \\ \cos n(p\phi - \epsilon) & \cos n(p\phi + p\gamma - \epsilon) & \dots & \cos n(p\phi + p(m-1)\gamma - \epsilon) \\ \cos n(p\phi - 2\epsilon) & \cos n(p\phi + p\gamma - 2\epsilon) & \dots & \cos n(p\phi + p(m-1)\gamma - 2\epsilon) \end{bmatrix}$$
(II.57)

e  $\mathcal{L}_{rs} = \mathcal{L}_{sr}^t$ , sendo os elementos de  $\mathcal{L}_{sr}$  obtidos pela variação de  $j$  e  $k$  na Expressão (II.31).

As matrizes de indutância próprias e mútuas da máquina possuem estruturas perfeitamente definidas. Como essas indutâncias foram deduzidas considerando a queda de força magnetomotriz apenas no entreferro, os resultados de simulações devem apresentar diferenças em relação ao comportamento real da máquina. A inclusão dos efeitos de queda de fmm no ferro pode ser considerada pela adoção do fator de saturação, que é definido como a razão entre a queda de fmm total e a queda de força magnetomotriz no ar (Veinott, 1959), (Kuhlmann, 1965), (Kostenko e Piotrovsky, 1969), (Langsdorf, 1977), (Smolensky, 1982) e (Liwschitz, 1984).

Apesar do nome, o fator de saturação deve ser considerado mesmo quando se trabalha na região linear da curva de magnetização. A diferença é que, em tensões reduzidas, o fator de saturação é praticamente constante, aumentando com a saturação magnética do material. Assim, em simulações dinâmicas, o fator de saturação deve ser variado para cada passo de integração.

A metodologia adotada para o cálculo do fator de saturação será mostrada no Capítulo VII.

Outro aspecto que deve ser considerado no cálculo das indutâncias próprias e mútuas da máquina é o fato das superfícies de entreferro não serem lisas. O que se faz, na prática, é utilizar o chamado Fator de Carter  $K_c$  que corrige o comprimento do entreferro para compensar a presença das ranhuras nestas superfícies (Veinott, 1969) e (Liwschitz, 1984).

As fórmulas para cálculo do Fator de Carter são apresentadas no Capítulo VII e a metodologia envolvida na dedução deste fator pode ser estudada no trabalho de Liwschitz (1984).

Com a inclusão destes dois fatores, as expressões das indutâncias são atualizadas como:

$$l_{s_n} = \frac{4 \mu_o l R}{\pi \delta_{FSM} K_c} \left( \frac{w K_{wn}}{p n} \right)^2, \quad (II.58)$$

$$L_r = \frac{2 \mu_o \pi R l}{m^2 \delta_{FSM} K_c} \quad (II.59)$$

$$L_{sr_n} = \frac{4 \mu_o l R w K_{wn}}{\pi \delta_{FSM} n^2 p^2 K_c} \sin \frac{n \pi}{2} \sin \frac{n p \pi}{m} \quad (II.60)$$

### II.3 Conclusões

Neste capítulo foi apresentado todo o desenvolvimento para obtenção do sistema de equações de representação do funcionamento da máquina de indução trifásica de gaiola simples, expresso em variáveis originais. Partiu-se da estrutura física da máquina para modelar os enrolamentos do estator de forma convencional e os circuitos do rotor, ou da gaiola, através de equações de malha. Esse sistema de equações em variáveis originais mostra as relações entre as grandezas elétricas reais da máquina mas, por outro lado, sua solução para determinação de condições transitórias da máquina, representa uma tarefa ingrata e muito árdua. Neste caso, o sistema exige transformações de variáveis para possibilitar simplificações nas soluções. A primeira delas, uma transformação para variáveis de componentes simétricas instantâneas, permite a separação de indutâncias harmônicas da matriz de mútuas e a diagonalização da matriz de indutâncias de entreferro do estator. Tratada de forma conveniente, essa transformação conduzirá a um novo sistema que possui ordem reduzida e é de fácil retorno às variáveis originais.

## CAPÍTULO III

### TRANSFORMAÇÃO EM COMPONENTES SIMÉTRICAS

#### III.1 Aplicação da Transformação

A aplicação da transformação em componentes simétricas visa estabelecer um sistema de equações mais simples, através da diagonalização de algumas de suas matrizes de representação parcial do sistema de equações originais. Outro objetivo é separar as componentes harmônicas da matriz de mútuas em diferentes posições na nova matriz formada. As componentes harmônicas das indutâncias mútuas ficarão distribuídas nas inúmeras posições da matriz, formando novas séries, diferentes das originais, onde cada posição conterà componentes de harmônicas exclusivas.

Levando-se em conta o elevado número de posições na matriz, pode-se alcançar uma representação com ordens elevadas de harmônicas, tomando-se, apenas, o primeiro termo de cada uma dessas novas séries.

Considerando o número de fases nas duas estruturas da máquina, utilizar-se-á a transformação de componentes simétricas de ordem 3, para as variáveis do estator, e a de ordem  $m$ , para as variáveis do rotor. Estas transformações podem ser representadas pelas seguintes matrizes:

$$A = 1/\sqrt{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad e \quad (III.1)$$

$$B = 1/\sqrt{m} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & b^1 & b^2 & b^3 & \dots & b^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b^{m-2} & b^{2(m-2)} & b^{3(m-2)} & \dots & b^{(m-1)(m-2)} \\ 1 & b^{m-1} & b^{2(m-1)} & b^{3(m-1)} & \dots & b^{(m-1)(m-1)} \end{bmatrix}, \quad (III.2)$$

onde:  $a = e^{j2\pi/3}$  e  $b = e^{j2\pi/m}$ .

A transformação aplicada às variáveis originais do estator resultará nas variáveis de componentes simétricas, tradicionalmente conhecidas; seqüência zero, seqüência positiva e seqüência negativa, como indicado a seguir:

$$[v_{s_0} \ v_{s_1} \ v_{s_2}]_{012}^t = A[v_{sa} \ v_{sb} \ v_{sc}]^t \quad (\text{III.3})$$

$$[i_{s_0} \ i_{s_1} \ i_{s_2}]_{012}^t = A[i_{sa} \ i_{sb} \ i_{sc}]^t \quad (\text{III.4})$$

Para o rotor, a aplicação da transformação de ordem  $m$  resultará em variáveis de componentes simétricas  $(0, 1, 2, 3, \dots, m-1)$ , sendo uma de seqüência zero, uma de seqüência positiva, uma de seqüência negativa e outras de seqüências específicas do sistema  $m$ -fásico estabelecido. Estas seqüências são obtidas da seguinte forma:

$$[v_{r_0} \ v_{r_1} \ v_{r_2} \ \dots \ v_{r_{m-1}}]_{012}^t = B[v_{r_1} \ v_{r_2} \ v_{r_3} \ \dots \ v_{r_m}]^t \quad (\text{III.5})$$

$$[i_{r_0} \ i_{r_1} \ i_{r_2} \ \dots \ i_{r_{m-1}}]_{012}^t = B[i_{r_1} \ i_{r_2} \ i_{r_3} \ \dots \ i_{r_m}]^t \quad (\text{III.6})$$

A aplicação da transformação é efetivada pela multiplicação da matriz  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ , à direita e em ambos os lados do sistema de equações da máquina, escrito em variáveis originais, como apresentado em (III.9).

Transformadas as tensões; os vetores de correntes em variáveis originais são substituídos por relações de equivalência em função dos vetores de correntes em componentes simétricas, escritas da seguinte forma:

$$[i_{sa} \ i_{sb} \ i_{sc}]^t = A^{-1}[i_{s_0} \ i_{s_1} \ i_{s_2}]_{012}^t \quad (\text{III.7})$$

$$[i_{r_1} \ i_{r_2} \ i_{r_3} \ \dots \ i_{r_m}]^t = B^{-1}[i_{r_0} \ i_{r_1} \ i_{r_2} \ \dots \ i_{r_{m-1}}]_{012}^t \quad (\text{III.8})$$

Com estas operações, o sistema de equações da máquina, em função das variáveis de componentes simétricas, tomará o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix}_{012} = \begin{bmatrix} A(\mathcal{R}_{ss} + \rho \mathcal{L}_{ss})A^{-1} & \rho(A\mathcal{L}_{sr}B^{-1}) \\ \rho(B\mathcal{L}_{rs}A^{-1}) & B(\mathcal{R}_{rr} + \rho \mathcal{L}_{rr})B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}_{012}, \quad (\text{III.9})$$



onde:  $v_s$ ,  $0$ ,  $i_s$  e  $i_r$  são matrizes colunas das tensões e correntes no sistema de componentes simétricas ou Sistema 2

$p$  é o operador derivação  $d/dt$ ,

$\mathcal{L}_{rs}$  é igual à matriz transposta de  $\mathcal{L}_{sr}$ ,

$B^{-1}$  é a matriz inversa de  $B$ ,

$A^{-1}$  é a matriz inversa de  $A$  e

012 significa grandezas no sistema de componentes simétricas ou Sistema 2, algumas vezes omitidas.

Uma vez efetuadas as multiplicações matriciais e derivações indicadas em (III.9), o sistema de equações em variáveis de componentes simétricas ficará melhor representado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} R_{ss} & \\ & R_{rr} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

As operações envolvidas entre as representações do sistema de equações mostrados em (III.9) e (III.10) são detalhadas a seguir:

**Cálculo de  $R_{ss}$ :**

$$R_{ss} = A R_{ss} A^{-1} = \begin{bmatrix} R_s & & \\ & R_s & \\ & & R_s \end{bmatrix}, \quad (\text{III.11})$$

**Cálculo de  $L_{ss}$ :**

$$L_{ss} = A \mathcal{L}_{ss} A^{-1} = \begin{bmatrix} L_{s0} & & \\ & L_{s1} & \\ & & L_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{sd} & & \\ & l_{sd} & \\ & & l_{sd} \end{bmatrix} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} l_{sn} \begin{bmatrix} l_{0n} & & \\ & l_{1n} & \\ & & l_{2n} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.12})$$

$$\text{onde: } \begin{cases} l_{0n} = 1 + \cos n2\pi/3 + \cos n4\pi/3 \\ l_{1n} = 1 + a^2 \cos n2\pi/3 + a \cos n4\pi/3 \\ l_{2n} = 1 + a \cos n2\pi/3 + a^2 \cos n4\pi/3 \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Calculando  $l_{0n}$ ,  $l_{1n}$  e  $l_{2n}$  para os diversos valores de  $n$ , obtém-se o seguinte resultado:

Se  $n$  é múltiplo de 3, então  $l_{0n} = 3$  e  $l_{1n} = l_{2n} = 0$ .

Se  $n$  não é múltiplo de 3, então  $l_{0n} = 0$  e  $l_{1n} = l_{2n} = 3/2$ .

Desta forma, os elementos da matriz  $L_{ss}$  podem ser calculados pelas seguintes expressões:

$$L_{s0} = l_{sd} + 3 \sum_{n=3}^{\infty} l_{s_n}, \quad (\text{III.14})$$

$$L_{s1} = L_{s2} = l_{sd} + 3/2 \sum_{n=1}^{\infty} l_{s_n}, \quad (\text{III.15})$$

onde na primeira expressão, o somatório só engloba ordens harmônicas múltiplas de 3 e na segunda, o somatório engloba as demais ordens harmônicas.

Cálculo de  $R_{rr}$ :

$$R_{rr} = B R_{rr} B^{-1} = B \{ 2raI + rbX \} B^{-1}, \quad (\text{III.16})$$

onde:  $I$  é a matriz identidade e

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.17})$$

Assim:

$$R_{rr} = \text{diag}[2ra \quad 2ra \quad 2ra \quad \dots \quad 2ra] + rbBXB^{-1}, \quad (\text{III.18})$$

sendo:  $BXB^{-1} =$

$$\frac{1}{m} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & b & b^2 & \dots & b^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b^{m-1} & b^{2(m-1)} & \dots & b^{(m-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \dots & C_{m-1} \\ C_0 & C_1 b^{-1} & C_2 b^{-2} & \dots & C_{m-1} b^{-(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_0 & C_1 b^{-(m-1)} & C_2 b^{-2(m-1)} & \dots & C_{m-1} b^{-(m-1)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

$$\text{ou } \mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{m-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.20})$$

onde  $C_i = 4\text{sen}^2\left[\frac{i\pi}{m}\right]$ , para  $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ , como será demonstrado mais adiante.

Finalmente:

$$\mathbf{R}_{rr} = \mathbf{B}\mathbf{R}_{rr}\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2ra & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2ra+C_1rb & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2ra+C_2rb & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2ra+C_{m-1}rb \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

Cálculo de  $C_i$ :

A multiplicação da linha  $k$ , da matriz  $\mathbf{X}$ , pela coluna  $(i+1)$ , da matriz  $\mathbf{B}^{-1}$  que resulta no elemento  $(k,i+1)$  da matriz  $\mathbf{X}\mathbf{B}^{-1}$ , pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{\sqrt{m}} [0 \dots 0 -1 \ 2 \ -1 \ 0 \dots 0] \begin{bmatrix} 1 \\ b^{-1} \\ b^{-2i} \\ \vdots \\ b^{-(k-1)i} \\ \vdots \\ b^{-(m-1)i} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \left\{ -b^{-(k-2)i} + 2b^{-(k-1)i} - b^{-ki} \right\}$$

Como  $b = e^{j2\pi/m}$ , os vetores  $b^t$ , para  $t = 0, 1, 2, \dots, m-1$ , formam um sistema de vetores equilibrados com, módulo unitário e ângulo de defasagem  $\gamma = 2\pi/m$ . Assim, os vetores  $b^{k-2}$ ,  $b^{k-1}$  e  $b^k$  estarão, também, defasados do ângulo  $\gamma$ , tendo uma configuração como a que é mostrada na Figura III.1.

Elevando-se  $b^{k-2}$  ao expoente  $(-i)$ , ele girará de um ângulo  $(2-k)(i+1)\gamma$ . Fazendo-se o mesmo com  $b^{k-1}$ , ele girará de  $(1-k)(i+1)\gamma$  e, no caso de  $b^k$ , ele girará de  $-k(i+1)\gamma$ , resultando em uma nova configuração, também, mostrada na Figura III.1.

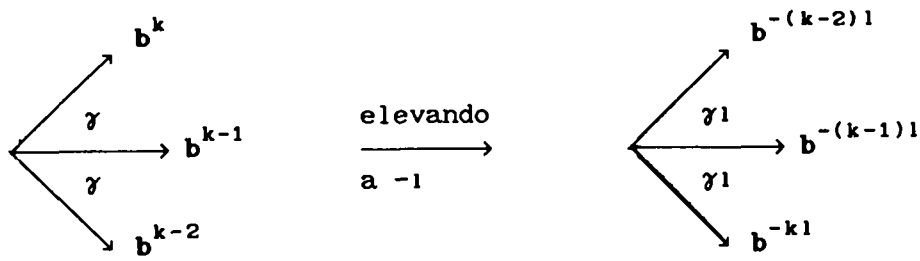


Figura III.1 Posicionamento dos vetores no cálculo de  $C_1$

O ângulo existente entre os três vetores, após terem sido elevados a  $(-1)$ , é igual a  $\gamma_1$  e a composição  $-b^{-(k-2)1} + 2b^{-(k-1)1} - b^{-k1}$  pode ser obtida por inspeção da Figura III.1 ou através do desenvolvimento abaixo:

$$\begin{aligned}
 -b^{-(k-2)1} + 2b^{-(k-1)1} - b^{-k1} &= (-b^1 + 2 - b^{-1})b^{-(k-1)1}, \\
 &= (2 - 2\cos \gamma)b^{-(k-1)1}, \\
 &= \left\{ 2 - 2 \left[ \cos^2 \gamma/2 - \sin^2 \gamma/2 \right] \right\} b^{-(k-1)1}, \\
 &= 4\sin^2 \gamma/2 b^{-(k-1)1}, \\
 &= \left[ 4 \sin^2 \pi/m \right] b^{-(k-1)1}, \\
 &= C_1 b^{-(k-1)1}.
 \end{aligned}$$

Cálculo de  $L_{rr}$ :

$$L_{rr} = B L_{rr} B^{-1} = B \{ 2laI + lbX + LrY \} B^{-1}, \quad (\text{III.22})$$

onde:  $X$  é a mesma matriz definida na Equação (III.17) e

$$Y = \begin{bmatrix} m-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & m-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & m-1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

A parcela  $B[2laI + lbX]B^{-1}$  é semelhante à expressão do cálculo de  $R_{rr}$ , na Equação (III.16). Desta forma, o resultado de tal parcela é obtido por analogia com a matriz apresentada em (III.21). Basta substituir-se nela;  $ra$  por  $la$  e  $rb$  por  $lb$ , obtendo-se:

$$B[2laI + lbX]B^{-1} = \begin{bmatrix} 2la & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2la+C_1lb & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2la+C_2lb & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2la+C_{m-1}lb \end{bmatrix} \quad (III.24)$$

O cálculo da parcela restante,  $BLrYB^{-1}$ , é apresentado a seguir:

$$BLrYB^{-1} = \frac{Lr}{\sqrt{m}} B \begin{bmatrix} 0 & m & m & \dots & m \\ 0 & mb^{-1} & mb^{-2} & \dots & mb^{-(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & mb^{-(m-1)} & mb^{-2(m-1)} & \dots & mb^{-(m-1)^2} \end{bmatrix} \quad (III.25)$$

$$\text{ou} \quad BLrYB^{-1} = \text{diag}[0 \quad mLr \quad mLr \quad \dots \quad mLr] \quad (III.26)$$

Finalmente, a matriz  $L_{rr}$  é dada pela soma das matrizes encontradas em (III.24) e (III.26) e representada da seguinte forma:

$$L_{rr} = \text{diag}[Lr_0 \quad Lr_1 \quad \dots \quad Lr_{m-1}], \quad (III.27)$$

$$\text{onde: } Lr_0 = 2la \quad e \quad (III.28)$$

$$Lr_k = 2la + C_k lb + mLr, \text{ para } k=0, 1, 2, \dots, \quad (III.29)$$

$$\text{sendo: } Lr = \frac{2 \mu_0 \pi R l}{m^2 \delta}, \quad (III.30)$$

$m$  o número de barras da gaiola do rotor,

$$C_k = 4 \text{sen}^2 \left[ \frac{k\pi}{m} \right] \quad e$$

$la$  e  $lb$  indutâncias de dispersão de segmentos de anel e de barras, como definidas no Capítulo II.

### III.2 Cálculo da Matriz de Mútuas em Componentes Simétricas

$$\mathbb{L}_{sr} = \mathbb{A} \mathbb{L}_{sr} \mathbb{B}^{-1} = \mathbb{A} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{L}_{sr_n} \mathbb{M}_n \right] \mathbb{B}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{L}_{sr_n} \mathbb{A} \mathbb{M}_n \mathbb{B}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{L}_{sr_n}, \quad (\text{III.31})$$

onde:

$$\mathbb{M}_n = \begin{bmatrix} \cos n\phi & \cos n(\phi + \gamma) & \dots & \cos n(\phi + p(m-1)\gamma) \\ \cos n(\phi - \epsilon) & \cos n(\phi + \gamma - \epsilon) & \dots & \cos n(\phi + p(m-1)\gamma - \epsilon) \\ \cos n(\phi - 2\epsilon) & \cos n(\phi + \gamma - 2\epsilon) & \dots & \cos n(\phi + p(m-1)\gamma - 2\epsilon) \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

Os elementos da matriz  $\mathbb{M}_n$  são substituídos pela equivalência

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \{ e^{j\theta} + e^{-j\theta} \}, \text{ resultando em:}$$

$$\mathbb{M}_n = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} e^{jn\phi} & e^{jn(\phi+\gamma)} & e^{jn(\phi+2\gamma)} & \dots & e^{jn(\phi+p(m-1)\gamma)} \\ e^{jn(\phi-\epsilon)} & e^{jn(\phi+\gamma-\epsilon)} & e^{jn(\phi+2\gamma-\epsilon)} & \dots & e^{jn(\phi+p(m-1)\gamma-\epsilon)} \\ e^{jn(\phi-2\epsilon)} & e^{jn(\phi+\gamma-2\epsilon)} & e^{jn(\phi+2\gamma-2\epsilon)} & \dots & e^{jn(\phi+p(m-1)\gamma-2\epsilon)} \end{bmatrix} + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-jn\phi} & e^{-jn(\phi+\gamma)} & e^{-jn(\phi+2\gamma)} & \dots & e^{-jn(\phi+p(m-1)\gamma)} \\ e^{-jn(\phi-\epsilon)} & e^{-jn(\phi+\gamma-\epsilon)} & e^{-jn(\phi+2\gamma-\epsilon)} & \dots & e^{-jn(\phi+p(m-1)\gamma-\epsilon)} \\ e^{-jn(\phi-2\epsilon)} & e^{-jn(\phi+\gamma-2\epsilon)} & e^{-jn(\phi+2\gamma-2\epsilon)} & \dots & e^{-jn(\phi+p(m-1)\gamma-2\epsilon)} \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{III.33})$$

Na expressão de  $\mathbb{M}_n$ , apresentada em (III.33), cada exponencial pode ser representada como um produto entre três outras funções exponenciais, compostas da seguinte forma: uma potência de  $a$ , uma potência de  $b$  e uma exponencial com argumento  $\pm jn\phi$ . A utilização desta propriedade dará à matriz  $\mathbb{M}_n$  a seguinte forma:

$$M_n = \frac{e^{jnp\phi}}{2} \begin{bmatrix} 1 & b^{np} & b^{2np} & b^{3np} & \dots & b^{np(m-1)} \\ a^{-n} & b^{np} a^{-n} & b^{2np} a^{-n} & b^{3np} a^{-n} & \dots & b^{np(m-1)} a^{-n} \\ a^{-2n} & b^{np} a^{-2n} & b^{2np} a^{-2n} & b^{3np} a^{-2n} & \dots & b^{np(m-1)} a^{-2n} \end{bmatrix} +$$

$$\frac{e^{-jnp\phi}}{2} \begin{bmatrix} 1 & b^{-np} & b^{-2np} & b^{-3np} & \dots & b^{-np(m-1)} \\ a^n & b^{-np} a^n & b^{-2np} a^n & b^{-3np} a^n & \dots & b^{-np(m-1)} a^n \\ a^{2n} & b^{-np} a^{2n} & b^{-2np} a^{2n} & b^{-3np} a^{2n} & \dots & b^{-np(m-1)} a^{2n} \end{bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

Para uma maior simplificação, cada parcela da matriz  $M_n$  será representada como um produto de uma matriz coluna por uma matriz linha, como mostrado na Equação (III.35). Esta nova representação é obtida por inspeção visual da matriz de (III.34), sendo a equivalência verificada pela simples execução das operações matriciais envolvidas em (III.35).

$$M_n = \frac{e^{jnp\phi}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ a^{-n} \\ a^{-2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b^{np} & b^{2np} & b^{3np} & \dots & b^{np(m-1)} \end{bmatrix} +$$

$$\frac{e^{-jnp\phi}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ a^n \\ a^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b^{-np} & b^{-2np} & b^{-3np} & \dots & b^{-np(m-1)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.35})$$

Como pode ser observado a seguir, a análise para cálculo da matriz  $AM_n B^{-1}$  ficará amplamente facilitada com esta representação simplificada da matriz  $M_n$ :

$$AM_n B^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \left\{ \frac{e^{jnp\phi}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ a^{-n} \\ a^{-2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b^{np} & b^{2np} & b^{3np} & \dots & b^{np(m-1)} \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. \frac{e^{-jnp\phi}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ a^n \\ a^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b^{-np} & b^{-2np} & \dots & b^{-np(m-1)} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & b^{-1} & b^{-2} & \dots & b^{-(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b^{-(m-1)} & b^{-2(m-1)} & \dots & b^{-(m-1)^2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

Multiplica-se a matriz  $A$  à esquerda dos vetores colunas, expressos em função de  $a$ , enquanto a matriz  $B^{-1}$  é multiplicada à direita das matrizes linha, expressas em função de  $b$ , resultando na seguinte expressão para  $AM_nB^{-1}$ :

$$AM_nB^{-1} = \frac{e^{jnp\phi}}{2\sqrt{3m}} \begin{bmatrix} (1+a^{-n}+a^{-2n}) \\ (1+a^{1-n}+a^{2-2n}) \\ (1+a^{2-n}+a^{1-2n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{m-1} b^{npk} & \sum_{k=0}^{m-1} b^{(np-1)k} & \dots & \sum_{k=0}^{m-1} b^{(np-(m-1))k} \\ \sum_{k=0}^{m-1} b^{-npk} & \sum_{k=0}^{m-1} b^{-(np+1)k} & \dots & \sum_{k=0}^{m-1} b^{-(np+(m-1))k} \end{bmatrix} +$$

$$\frac{e^{-jnp\phi}}{2\sqrt{3m}} \begin{bmatrix} (1+a^n+a^{2n}) \\ (1+a^{1+n}+a^{2+2n}) \\ (1+a^{2+n}+a^{1+2n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{m-1} b^{-npk} & \sum_{k=0}^{m-1} b^{-(np+1)k} & \dots & \sum_{k=0}^{m-1} b^{-(np+(m-1))k} \end{bmatrix} \quad (III.37)$$

Os valores dos elementos da matriz  $AM_nB^{-1}$ , na forma apresentada em (III.37), dependem dos resultados dos somatórios expressos em função de  $a$  e de  $b$ . Esses somatórios, por sua vez, terão valores que dependem do número de fases, da ordem harmônica considerada e, no caso das expressões em  $b$ , dependem, também, do número de par de pólos da máquina.

Das seis expressões em função de  $a$ , mostradas em (III.37), existem duas para cada harmônica  $n$  que resultam no valor 3, sendo uma em cada parcela de  $AM_nB^{-1}$ . As demais expressões em  $a$ , para a mesma harmônica  $n$ , resultam no valor zero. Semelhantemente, para cada harmônica duas das expressões em  $b$  podem resultar no valor  $m$  ou no valor zero. Desta forma, a matriz  $AM_nB^{-1}$  conterà dois elementos, um para cada uma de suas parcelas. Eles são resultantes da multiplicação de uma expressão em  $a$ , com valor 3 e de uma expressão em  $b$ , com valor  $m$ , ficando, cada um deles, posicionado na mesma linha da expressão em  $a$  e na mesma coluna da expressão em  $b$  que o definiu. Um deles terá valor  $\frac{\sqrt{3m}}{2}e^{jnp\phi}$  e o outro será igual a  $\frac{\sqrt{3m}}{2}e^{-jnp\phi}$ .

A matriz  $L_{sr}_n$ , também, terá dois elementos. Eles são resultantes da multiplicação dos elementos de  $AM_nB^{-1}$  pelo parâmetro de indutância  $L_{sr}_n$ . Cada um desses elementos de  $L_{sr}_n$  inter-relaciona uma componente de seqüência do estator a outra componente de seqüência do rotor.

As observações destacadas acima podem ser verificadas pelo seguinte exemplo:



Exemplo III.1 - Seja uma máquina com 2 pólos,  $p=1$  e número de barras  $m=8$ .

1<sup>a</sup> harmônica -  $n=1$ :

Expressões em  $a$  que resultam no valor 3:  $1+a^{1-n}+a^{2-2n}$  e  $1+a^{2+n}+a^{1+2n}$ .

A primeira expressão corresponde à segunda linha da primeira parcela e a segunda corresponde à terceira linha da segunda parcela da matriz  $Lsr_1$ .

Expressões em  $b$  que resultam no valor 8:  $\sum_{k=0}^7 b^{(n-1)k}$  e  $\sum_{k=0}^7 b^{-(n+7)k}$ .

A primeira expressão corresponde à segunda coluna da primeira parcela e a segunda corresponde à oitava coluna da segunda parcela da matriz  $Lsr_1$ .

$$Lsr_1 = \frac{1}{2\sqrt{24}} Lsr_1 \left\{ e^{j1\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-j1\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \right\}$$

O elemento da primeira parcela da matriz  $Lsr_1$  está associado a uma seqüência positiva do estator e a uma seqüência positiva do rotor.

O elemento da segunda parcela da matriz  $Lsr_1$  está associado a uma seqüência negativa do estator e a uma seqüência negativa do rotor.

3<sup>a</sup> harmônica -  $n=3$ :

Expressões em  $a$  que resultam no valor 3:  $1+a^{-n}+a^{-2n}$  e  $1+a^n+a^{2n}$ .

A primeira e a segunda expressão correspondem à primeira linha de  $Lsr_3$ .

Expressões em  $b$  que resultam no valor 8:  $\sum_{k=0}^7 b^{(n-3)k}$  e  $\sum_{k=0}^7 b^{-(n+5)k}$ .

A primeira expressão corresponde à quarta coluna da primeira parcela e a segunda corresponde à sexta coluna da segunda parcela da matriz  $Lsr_3$ .

$$Lsr_3 = \frac{1}{2\sqrt{24}} Lsr_3 \left\{ e^{j3\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-j3\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

O elemento da primeira parcela da matriz  $Lsr_3$  está associado a uma seqüência zero do estator e à seqüência 3 do rotor que não é positiva, não é negativa e nem zero.

O elemento da segunda parcela da matriz  $Lsr_3$  está associado a uma seqüência zero do estator e à seqüência 5 do rotor que são vetores conjugados dos vetores da seqüência 3 da primeira parcela.

5<sup>a</sup> harmônica - n=5:

Expressões em a que resultam no valor 3:  $1+a^{2-n}+a^{1-2n}$  e  $1+a^{1+n}+a^{2+2n}$ .

A primeira expressão corresponde à terceira linha da primeira parcela e a segunda corresponde à segunda linha da segunda parcela da matriz  $Lsr_5$ .

Expressões em b que resultam no valor 8:  $\sum_{k=0}^7 b^{(n-5)k}$  e  $\sum_{k=0}^7 b^{-(n+3)k}$ .

A primeira expressão corresponde à sexta coluna da primeira parcela e a segunda corresponde à quarta coluna da segunda parcela da matriz  $Lsr_5$ .

$$Lsr_5 = \frac{1}{2\sqrt{24}} Lsr_5 \left\{ e^{j5\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-j5\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

O elemento da primeira parcela da matriz  $Lsr_5$  está associado a uma sequência negativa do estator e à sequência 5 do rotor que não é positiva, não é negativa e nem zero.

O elemento da segunda parcela da matriz  $Lsr_5$  está associado a uma sequência positiva do estator e à sequência 3 do rotor que são vetores conjugados da sequência 5 da primeira parcela.

7<sup>a</sup> harmônica - n=7:

Expressões em a que resultam no valor 3:  $1+a^{1-n}+a^{2-2n}$  e  $1+a^{2+n}+a^{1+2n}$ .

A primeira expressão corresponde à segunda linha da primeira parcela e a segunda corresponde à terceira linha da segunda parcela da matriz  $Lsr_7$ .

Expressões em b que resultam no valor 8:  $\sum_{k=0}^7 b^{(n-7)k}$  e  $\sum_{k=0}^7 b^{-(n+1)k}$ .

A primeira expressão corresponde à oitava coluna da primeira parcela e a segunda corresponde à segunda coluna da segunda parcela da matriz  $Lsr_7$ .

$$Lsr_7 = \frac{1}{2\sqrt{24}} Lsr_7 \left\{ e^{j7\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-j7\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

O elemento da primeira parcela da matriz  $Lsr_7$  está associado a uma sequência positiva do estator e a uma sequência negativa do rotor.

O elemento da segunda parcela da matriz  $Lsr_7$  está associado a uma sequência negativa do estator e a uma sequência positiva do rotor.

9<sup>a</sup> harmônica - n=9:

Expressões em a que resultam no valor 3:  $1+a^{-n}+a^{-2n}$  e  $1+a^n+a^{2n}$ .

A primeira e a segunda expressão correspondem à primeira linha  $Lsr_9$ .

Expressões em b que resultam no valor 8:  $\sum_{k=0}^7 b^{(n-1)k}$  e  $\sum_{k=0}^7 b^{-(n+7)k}$ .

A primeira expressão corresponde à segunda coluna da primeira parcela e a segunda corresponde à oitava coluna da segunda parcela da matriz  $Lsr_9$ .

$$Lsr_9 = \frac{1}{2\sqrt{24}} Lsr_9 \left\{ e^{j9\phi} \begin{bmatrix} 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-j9\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

O elemento da primeira parcela da matriz  $Lsr_9$  está associado a uma sequência zero do estator e à sequência positiva do rotor.

O elemento da segunda parcela da matriz  $Lsr_9$  está associado a uma sequência zero do estator e à sequência negativa do rotor.

11<sup>a</sup> harmônica - n=11:

Expressões em a que resultam no valor 3:  $1+a^{2-n}+a^{1-2n}$  e  $1+a^{1+n}+a^{2+2n}$

A primeira expressão corresponde à terceira linha da primeira parcela e a segunda corresponde à segunda linha da segunda parcela da matriz  $Lsr_{11}$ .

Expressões em b que resultam no valor 8:  $\sum_{k=0}^7 b^{(n-3)k}$  e  $\sum_{k=0}^7 b^{-(n+5)k}$ .

A primeira expressão corresponde à quarta coluna da primeira parcela e a segunda corresponde à sexta coluna da segunda parcela da matriz  $Lsr_{11}$ .

$$Lsr_{11} = \frac{1}{2\sqrt{24}} Lsr_{11} \left\{ e^{j11\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-j11\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

O elemento da primeira parcela da matriz  $Lsr_{11}$  está associado a uma sequência negativa do estator e à sequência 3 do rotor.

O elemento da segunda parcela da matriz  $Lsr_{11}$  está associado a uma sequência positiva do estator e à sequência 5 do rotor.

13<sup>a</sup> harmônica - n=13: A esta harmônica corresponderá a elementos posicionados em posições já ocupadas pelos elementos de n=11:

$$Lsr_{13} = \frac{1}{2\sqrt{24}} Lsr_{13} \left\{ e^{j13\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-j13\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

As demais harmônicas corresponderão elementos em posições já preenchidas pelas harmônicas até aqui observadas. Em cada posição da matriz  $L_{sr}$  serão formadas séries de harmônicas, onde cada uma conterá ordens totalmente diferentes das outras. A simplificação é dada quando se utiliza apenas a primeira harmônica de cada série. No exemplo mostrado, a matriz  $L_{sr}$  ficaria representada da seguinte forma:

$$L_{sr} = \begin{bmatrix} 0 & m_9 & 0 & m_3 & 0 & m_{-5} & 0 & m_{-9} \\ 0 & m_1 & 0 & m_{-5} & 0 & m_{-11} & 0 & m_7 \\ 0 & m_{-7} & 0 & m_{11} & 0 & m_5 & 0 & m_{-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.38})$$

onde  $m_n$  é igual a  $\frac{\sqrt{24}}{2} L_{sr_n} e^{jn\phi}$  e  $m_{-n}$  é igual a  $\frac{\sqrt{24}}{2} L_{sr_n} e^{-jn\phi}$ .

### III.2.1 Análise das expressões em $a=e^{j2\pi/3}$

Uma potência de  $a$  representa um vetor complexo igual a uma raiz cúbica da unidade. São três raízes dispostas como na Figura III.2, de maneira que a soma delas tem resultado nulo ou 3.

Em todas as expressões envolvendo  $a$ , na Equação (III.37), tem-se uma das raízes que é a própria unidade e mais duas potências de  $a$  que podem ser iguais a quaisquer das três raízes. Examinando-se com maior cuidado, nota-se que dado uma harmônica  $n$ , as expressões em  $a$ , ou são somas da unidade, resultando no valor 3, ou são somas das três raízes, resultando no valor zero.

Para harmônicas de sequência zero, as expressões  $1+a^{-n}+a^{-2n}$  e  $1+a^n+a^{2n}$  terão valor 3. Isto é verificado pela substituição da harmônica  $n$ , nas expressões de  $a$ , por  $n=3t$  (para  $t=0, 1, 2, \dots$ ) que é a lei de formação destas harmônicas.

Para harmônicas de sequência positiva, as expressões que têm valor 3 são  $1+a^{1-n}+a^{2-2n}$  e  $1+a^{2+n}+a^{1+2n}$ . Neste caso, substitui-se  $n$  por  $3t+1$  (para  $t=0, 1, 2, \dots$ ) para a proceder à verificação.

Para harmônicas de sequência negativa, as expressões  $1+a^{2-n}+a^{1-2n}$  e  $1+a^{1+n}+a^{2+2n}$  é que terão valor 3. E a lei de formação para usar na verificação é  $n=3t-1$  (para  $t=0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Considerando-se que as harmônicas espaciais de força magnetomotriz são de ordens ímpares, ou seja  $n=2q+1$ , vem que:

(a) Para harmônicas ímpares, com  $n=2q+1$ , e, ao mesmo tempo, de sequência zero, com  $n=3t$ , para  $t$  e  $q$  inteiros, tem-se:

$$n \in \{3, 9, 15, 21, 27, \dots\} \text{ ou } n=6s+3, \text{ para } s = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.39})$$

(b) Para harmônicas ímpares, com  $n=2q+1$ , e, ao mesmo tempo, de seqüência positiva, com  $n=3t+1$ , para  $t$  e  $q$  inteiros, tem-se:

$$n \in \{1, 7, 13, 19, \dots\} \text{ ou } n=6s+1, \text{ para } s = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.40})$$

(c) Para harmônicas ímpares, com  $n=2q+1$ , e, ao mesmo tempo, de seqüência negativa, com  $n=3t-1$ , para  $t$  e  $q$  inteiros, tem-se:

$$n \in \{5, 11, 17, 23, \dots\} \text{ ou } n=6s-1, \text{ para } s = 1, 2, \dots \quad (\text{III.41})$$

Assim:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1+a^{-n}+a^{-2n} = 3 & \text{e} \quad 1+a^n+a^{2n} = 3 \quad \text{para } n=6s+3 \\ 1+a^{1-n}+a^{2-2n} = 3 & \text{e} \quad 1+a^{2+n}+a^{1+2n} = 3 \quad \text{para } n=6s+1 \\ 1+a^{2-n}+a^{1-2n} = 3 & \text{e} \quad 1+a^{1+n}+a^{2+2n} = 3 \quad \text{para } n=6s-1. \end{array} \right. \quad (\text{III.42})$$

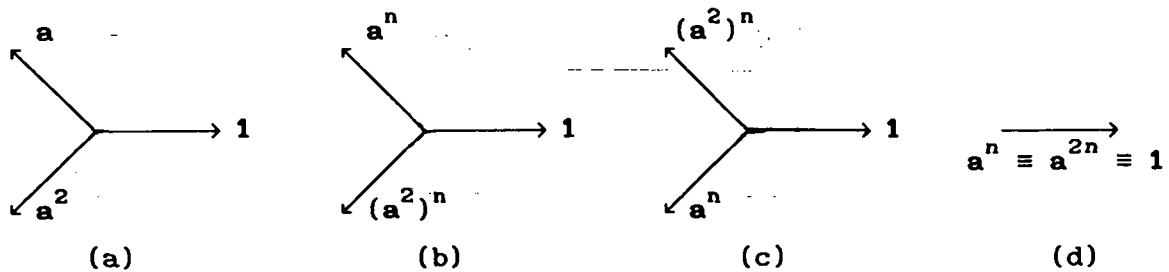


Figura III.2 (a)Raízes cúbicas da unidade, (b)Potências das raízes para  $n=6s+1$ , (c) Potências das raízes para  $n=6s-1$  e (d)Potências das raízes para  $n=6s+3$ , para  $q=0, 1, 2, \dots$

### III.2.2 Análise das expressões em $b=e^{j2\pi/m}$

Análise similar, às realizadas para as expressões em  $a$ , pode ser feita para as expressões em função de  $b$  na matriz  $AM_n B^{-1}$ , representadas abaixo, em destaque:

$$\sum_{k=0}^{m-1} b^{npk}, \quad \sum_{k=0}^{m-1} b^{(np-1)k}, \quad \dots, \quad \sum_{k=0}^{m-1} b^{(np-1)k}, \quad \dots, \quad \sum_{k=0}^{m-1} b^{(np-(m-1))k} \quad e$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} b^{-npk}, \sum_{k=0}^{m-1} b^{-(np+1)k}, \dots, \sum_{k=0}^{m-1} b^{-(np+l)k}, \dots, \sum_{k=0}^{m-1} b^{-(np+(m-1))k}$$

Os vetores complexos  $b^0, b^1, b^2, \dots, b^{m-1}$ , representam as raízes da unidade de ordem  $m$ . Elas estão dispostas no plano complexo de forma semelhante às raízes cúbicas da unidade. Guardam um ângulo  $2\pi/m$ , constante entre si (Figura III.3) e a soma delas dá zero.

Uma propriedade dos números complexos é que, se os vetores raízes da unidade são elevados a uma mesma potência, os vetores resultantes deverão ocupar algumas posições das raízes originais (Figura III.3), exceto, quando o expoente é múltiplo do índice da raiz. Neste caso, todos os vetores resultantes serão iguais à unidade e a soma dará o próprio índice da raiz.

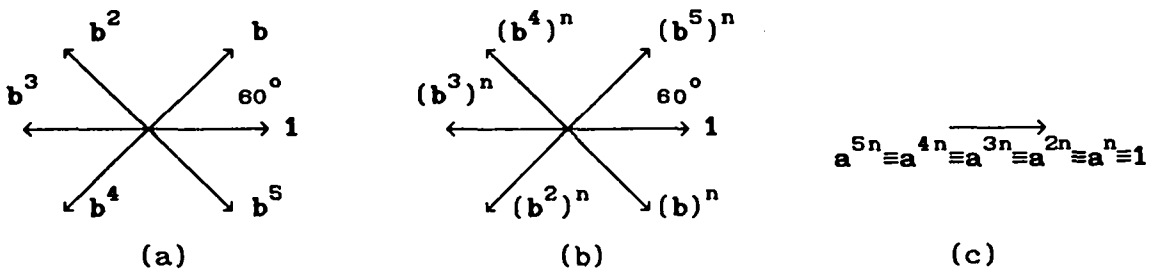


Figura III.3 (a) Raízes de ordem 6 da unidade, (b) Potências das raízes para  $n=5$  e (c) Potências das raízes para  $n$  múltiplo de 6.

Na análise das expressões em  $b$  há uma diferença de tratamento em relação às expressões em  $a$  devido à presença do número de par de pólos  $p$  que aparece multiplicado pela ordem da harmônica  $n$ . Isto não foi observado no Exemplo III.1 porque o número de par de pólos considerado foi  $p=1$ . Por este motivo, a análise será feita primeiramente para  $p=1$ , depois para um  $p$  que seja divisor de  $m$  e, por último, para  $p \neq 1$  e não divisor de  $m$ .

De forma geral, as expressões em  $b$  podem ser representadas por uma das expressões mostradas abaixo:

$$\sum_{k=0}^{m-1} b^{(np-1)k} \text{ e } \sum_{k=0}^{m-1} b^{(-np-1)k}, \quad (\text{III.43})$$

onde  $l = 0, 1, 2, \dots, (m-1)$  e está relacionado com a ordem da coluna  $a$  que o somatório em função de  $b$  está posicionado.

Considerando  $p=1$ :

Para harmônicas de seqüência zero, as expressões  $\sum_{k=0}^{m-1} b^{nk}$  e  $\sum_{k=0}^{m-1} b^{-nk}$  terão valor  $m$ . Isto é verificado, pela substituição da harmônica  $n$  nas expressões em  $b$ , por  $n=mt$  (para  $t=0, 1, 2, \dots$ ), que é a lei de formação das harmônicas de seqüência zero, para um sistema  $m$ -fásico.

Para harmônicas de seqüência positiva, as expressões que têm valor  $m$  são  $\sum_{k=0}^{m-1} b^{(n-1)k}$  e  $\sum_{k=0}^{m-1} b^{-(n+(m-1))k}$ . Neste caso, substitui-se  $n$  por  $mt+1$  (para  $t=0, 1, 2, \dots$ ) para a proceder à verificação.

Para harmônicas de seqüência negativa, as expressões  $\sum_{k=0}^{m-1} b^{(n-(m-1))k}$  e  $\sum_{k=0}^{m-1} b^{-(n+1)k}$  é que terão valor  $m$ . E a lei de formação, para usar na verificação, é  $n=mt-1$  (para  $t=0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Além das harmônicas de seqüências zero, positiva e negativa, podem existir harmônicas pertencentes a outros grupos de seqüência, tais como: harmônicas com lei de formação  $n=mt+3$ ,  $n=mt+5$ , etc. O número de grupos de seqüências de harmônicas é igual ao número de fases do rotor. De uma forma geral, para um sistema  $m$ -fásico,  $n$  pode ser expresso por  $n=mt+t_0$ , onde  $t_0$  pode ser usado para identificar ou denominar a seqüência da harmônica considerada.

As  $m$  seqüências de fases podem ser relacionadas com as colunas, da seguinte forma:

seqüência zero,  $n=mt$ : ocorrem na coluna correspondente a  $l=0$ , nas duas parcelas da matriz  $AM_n B^{-1}$ , mostrada em (III.37),

seqüência positiva ou seqüência um,  $n=mt+1$ : ocorrem na coluna com  $l=1$ , na primeira parcela de  $AM_n B^{-1}$  e na coluna com  $l=m-1=7$  na segunda parcela,

seqüência dois,  $n=mt+2$ : coluna com  $l=2$  na 1<sup>a</sup> parcela e com  $l=6$  na 2<sup>a</sup>,

seqüência três,  $n=mt+3$ : coluna com  $l=3$  na 1<sup>a</sup> parcela e com  $l=5$  na 2<sup>a</sup>, seqüênquatquatn=mtn=mtcoldcoldpardpardpardpardparcparcelas, las,

seqüência cinco,  $n=mt+5$ : coluna com  $l=5$  na 1<sup>a</sup> parcela e com  $l=3$  na 2<sup>a</sup>, seqüência negativa ou sete,  $n=mt+(m-1)$ : coluna com  $l=m-1=7$  na 1<sup>a</sup> parcela e com  $l=1$  na 2<sup>a</sup>.

Assim, para harmônicas de seqüência 3, as expressões que têm valor  $m$  são  $\sum_{k=0}^{m-1} b^{(n-3)k}$  e  $\sum_{k=0}^{m-1} b^{-(n+(m-3))k}$ . Neste caso, para a proceder à verificação, substitui-se  $n$  por  $mt+3$  (para  $t=0, 1, 2, \dots$ ).

E para uma harmônica qualquer, de uma sequência 1, as expressões que têm valor  $m$  são  $\sum_{k=0}^{m-1} b^{(n-1)k}$  e  $\sum_{k=0}^{m-1} b^{-(n+(m-1))k}$ . Neste caso, substitui-se  $n$  por  $mt+1$  (com  $t=0, 1, 2, \dots$ ), para a proceder à verificação.

Em todos os casos, para se obter o valor  $m$  nos somatórios apresentados em (III.43) para uma determinada harmônica  $n$ , os expoentes de todos os termos deverão ser múltiplos de  $m$ . Ou seja, os vetores complexos  $b^k$  (para  $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ ), nos somatórios, ficam elevados a  $mtk$  ou  $m(t+1)k$  e, cada uma dessas potências resulta no valor 1.

Logo, para que os expoentes  $n-1$  e  $-n-1$ , a que são elevados os vetores complexos  $b^k$ , nas duas expressões apresentadas em (III.43), sejam múltiplos de  $m$ , deve-se ter  $n-1=gm$  para algum  $g$  inteiro e  $-n-1=g'm$  para algum  $g'$  inteiro.

Assim:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{m-1} b^{(n-1)k} = m \text{ para harmônicas } n=gm+1 \text{ e} \\ \sum_{k=0}^{m-1} b^{(-n-1)k} = m \text{ para harmônicas } n=-g'm-1. \end{array} \right. \quad (\text{III.44})$$

Considerando  $p$  maior que 1 e  $m$  divisível por  $p$ :

Quando  $p$  é maior que 1, as  $m$  barras da gaiola do rotor estão distribuídas sobre todos os pólos definidos pela onda de fluxo girante resultante da máquina, ficando cada par de pólos, no rotor, relacionados com um número de barras igual a  $m/p$ . Se esta divisão for exata, ficará caracterizado um sistema com  $\frac{m}{p}$  fases para o rotor. A análise das harmônicas, em relação ao comportamento delas como componente de sequência, pode ser feita para  $\frac{m}{p}$  fases e não para  $m$  fases. O que foi discutido para  $p=1$  permanece válido e a análise, antes, feita para  $n$  pode ser feita, agora, para  $np$ . Os somatórios em (III.43), serão diferentes de zero quando  $np-1$  ou  $-np-1$  for múltiplo de  $m$ . Se isto acontece, os vetores de fase  $b^k$ , nos somatórios, ficarão elevados a um expoente igual a  $gm$ , para algum  $g$  inteiro, da seguinte forma:

$$b^0, b^{gm}, b^{2gm}, \dots, b^{(m-2)gm} \text{ e } b^{(m-1)gm}.$$



Como  $m$  é múltiplo de  $p$ , os vetores acima podem ser interpretados como expressões em função de  $c=e^{j2\pi p/m}$  ou  $c=b^p$ , ficando divididos em  $p$  grupos, onde todos os grupos serão compostos pelos mesmos  $m/p$  vetores de fase de um sistema de  $m/p$  fases. Para melhor entendimento, retorna-se ao Exemplo (III.1):

Se no Exemplo III.1, para  $m=8$ , o número de pólos fosse igual a 4, ou seja  $p=2$ , os somatórios não nulos, em (III.43), teriam os seguintes termos:

$$b^0, b^{8g}, b^{16g}, \dots, b^{48g} \text{ e } b^{56g}.$$

Eles são resultantes dos vetores de fases  $b^0, b^1, b^2, \dots, b^6$  e  $b^7$  quando elevados ao expoente  $gm=8g$ , provenientes de  $np-l$  e  $-np-l$ , onde  $b=e^{j2\pi/8}$ . Como  $m=4p$ , os termos dos somatórios podem ser interpretados como sendo:

$$c^0, c^{gmo}, c^{2gmo}, c^{3gmo}, c^{4gmo}, c^{5gmo}, c^{6gmo}, c^{7gmo},$$

onde  $m_0=4$  e  $c=b^p=b^2=e^{j2\pi/4}$ , caracterizando os somatórios, como composições de potências dos vetores de fases de um sistema quadrifásico.

Neste caso, as expressões em  $b$  (ou em  $c$ ) teriam valor 8, quando  $2n-l=g8$  ou  $-2n-l=g'8$ , para algum  $g$  e algum  $g'$  inteiro. As  $m/p$  (ou 4) seqüências de fases podem ser relacionadas com as colunas, da seguinte forma:

seq. zero,  $n=mt \Rightarrow l=-g8 \pm 2n = -g8 \pm 2mt = 0$  nas duas parcelas, para  $g=2t$ ,  
 seq. pos.,  $n=mt+1 \Rightarrow l=2$  na  $1^a$  parcela e  $l=6$  na  $2^a$ , para  $g=2t$  ou  $-2t-1$ ,  
 seq. dois,  $n=mt+2 \Rightarrow l=4$  nas duas parcelas, para  $g=2t$  ou  $-2t-1$ ,  
 seq. neg.,  $n=mt+3 \Rightarrow l=6$  na  $1^a$  parcela e  $l=2$  na  $2^a$ , para  $g=2t$  ou  $-2t-1$ ,  
 seq. zero,  $n=mt+4 \Rightarrow l=0$  nas duas parcelas, para  $g=2t+1$ ,  
 seq. pos.,  $n=mt+5 \Rightarrow l=2$  na  $1^a$  parcela e  $l=6$  na  $2^a$ , para  $g=2t+1$  ou  $-2t-2$ ,  
 seq. dois,  $n=mt+6 \Rightarrow l=4$  nas duas parcelas, para  $g=2t+1$  ou  $-2t-2$ ,  
 seq. neg.,  $n=mt+7 \Rightarrow l=6$  na  $1^a$  parcela e  $l=2$  na  $2^a$ , para  $g=2t+1$  ou  $-2t-2$ .

Neste caso, a ordem de uma coluna dada por  $l$ , ( $l=0, 1, 2, \dots, m-1$ , não é indicadora direta da componente de seqüência das harmônicas posicionadas nela.

As harmônicas da coluna  $l$  na primeira parcela da matriz  $AM_nB^{-1}$  serão as de formação  $n=mt+l/2$  e na segunda parcela, as de formação  $n=mt+(m-l)/2$  e não as de formação  $n=mt+l$  ou  $n=mt-l$ , como em  $p=1$ .

Considerando  $p$  maior que 1 e não divisor de  $m$ :

Quando  $m$  não for divisível por  $p$ , o rotor só poderá ser interpretado como um sistema  $m$ -fásico. Nos somatórios apresentados em (III.43), os vetores de fase  $b^k$  aparecem elevados ao expoente  $np-l$  ou  $-np-l$ . Quando estes expoentes

são múltiplos de  $m$ , os somatórios resultam no valor  $m$  e, os termos dos somatórios não podem ser escritos em função de vetores de fase de um sistema de ordem  $m/p$ , como foi feito para  $m$  divisível por  $p$ .

Se no Exemplo III.1, para  $m=8$ , o número de pólos fosse igual a 6, ou  $p=3$ , os somatórios não nulos, em (III.43), teriam os mesmos termos que para  $m$  divisível por  $p$ . Só que neste caso, não haveria o sistema de fases de ordem  $m/p$  porque  $8/3$  não é inteiro.

Neste caso, as expressões em  $b$  têm valor 8, quando  $3n-l=g8$  ou  $-3n-l=g'8$ , para algum  $g$  e algum  $g'$  inteiro e as  $m$  seqüências de fases podem ser relacionadas com as colunas, da seguinte forma:

Das harmônicas relacionadas só as ímpares são consideradas.

seq. zero,  $n=mt \Rightarrow l=-g8 \pm 3n = -g8 \pm 3mt = 0$  nas duas parcelas, para  $g=3t$ ,

seq. pos.,  $n=mt+1 \Rightarrow l=3$  na 1<sup>a</sup> parcela e  $l=5$  na 2<sup>a</sup>, para  $g=3t$  ou  $-3t-1$ ,

seq. dois,  $n=mt+2 \Rightarrow l=6$  na 1<sup>a</sup> parcela e  $l=2$  na 2<sup>a</sup>, para  $g=3t$  ou  $-3t-1$ ,

seq. três,  $n=mt+3 \Rightarrow l=1$  na 1<sup>a</sup> parcela e  $l=7$  na 2<sup>a</sup>, para  $g=3t+1$  ou  $-3t-2$ ,

seq. quatro,  $n=mt+4 \Rightarrow l=4$  nas duas parcelas, para  $g=3t+1$  ou  $-3t-2$ ,

seq. cinco,  $n=mt+5 \Rightarrow l=7$  na 1<sup>a</sup> parcela e  $l=1$  na 2<sup>a</sup>, para  $g=3t+1$  ou  $-3t-2$ ,

seq. seis,  $n=mt+6 \Rightarrow l=2$  na 1<sup>a</sup> parcela e  $l=6$  na 2<sup>a</sup>, para  $g=3t+2$  ou  $-3t-3$ ,

seq. neg.,  $n=mt+7 \Rightarrow l=5$  na 1<sup>a</sup> parcela e  $l=3$  na 2<sup>a</sup>, para  $g=3t+2$  ou  $-3t-3$ .

Todas as componentes de seqüências são representadas e todas as colunas da matriz de mútuas são utilizadas, exceto quando se considera só harmônicas ímpares. Neste caso, metade das colunas serão nulas. A diferença em relação ao caso  $p=1$  é que as harmônicas estarão distribuídas em colunas diferentes. A relação entre o número  $l$  da coluna e a componente de seqüência das harmônicas  $n$  nela posicionadas pode ser dada por  $l=\pm pn-gm$  ou  $l=\pm 3n-g8$ , para o menor inteiro  $g$  satisfazendo a relação.

#### Considerações importantes:

1) Os elementos da matriz  $AM_n B^{-1}$ , mostrada em (III.37), são calculados pelas expressões dos somatórios  $\sum_{k=0}^{m-1} b^{(np-l)k}$  e  $\sum_{k=0}^{m-1} b^{(-np-l)k}$ , onde o valor de  $l$ , no expoente de cada termo, está relacionado diretamente com a ordem da coluna em que os somatórios são não nulos para determinada harmônica. Nos três casos analisados anteriormente ( $p=1$ ,  $p$  divisor de  $m$  e demais valores de  $p$ ), foi observado que para  $l=0$  os somatórios correspondem a elementos da primeira coluna da matriz  $AM_n B^{-1}$ , para  $l=1$ , correspondem elementos da 2<sup>a</sup> coluna e,

assim sucessivamente, até  $l=m-1$ , para a coluna de ordem  $m$ . As colunas, portanto, podem ser identificadas pela sua ordenação natural ou pelo valor de  $l$ , que está relacionado também com o número da componente de sequência das correntes que interagem com os elementos desta mesma coluna  $l$ .

2) Quando  $p$  é maior que 1 e  $m$  é divisível por  $p$  existirão colunas totalmente nulas, ou seja, que não são posicionadas nenhuma harmônica, par ou ímpar. Os valores de  $l$  estarão relacionados com os números das componentes de sequência multiplicados por  $p$ , a ordem do sistema de fases ficará dividida por  $p$  e só parte das  $m$  colunas ficarão relacionadas com as  $m/p$  componentes de sequência. A matriz ficará, ainda, com menos colunas não nulas quando se considerar só harmônicas ímpares.

3) Para  $p$  maior que 1, com  $m$  não divisível por  $p$ , as  $m$  colunas estarão relacionadas com as  $m$  componentes de sequência, com uma distribuição diferente do caso  $p=1$ , sendo nulas só as colunas correspondentes a harmônicas pares.

4) Como  $l$  varia de 0 até  $m-1$ , para cada harmônica  $n$ , a expressão  $np-l$  será múltipla de  $m$  apenas para um valor de  $l$  na primeira parcela da matriz  $AM_nB^{-1}$ . Existirá, também, apenas um  $l'$  tal que  $-np-l'$  seja múltiplo de  $m$  na segunda parcela de  $AM_nB^{-1}$ . Para a harmônica  $n$  considerada, nas demais colunas das duas parcelas da matriz  $AM_nB^{-1}$ , com outros valores de  $l$ , os valores de  $np-l$  não serão múltiplos de  $m$  e as expressões em  $b$  serão iguais a zero. Desta forma, a matriz  $Lsr_n$  terá, apenas, dois elementos não nulos, um na coluna  $l$  e outro na coluna  $l'$ , sendo a relação entre  $l$  e  $l'$  dada por:  $l+l'=m$ .

Prova:

$l$  satisfaz  $np-l$  múltiplo de  $m \Rightarrow np-l=gm$  para o menor inteiro  $g$  que satisfaz a igualdade.  $\Rightarrow np=gm+l$  e  $-np=-gm-l \Rightarrow -np+l = -gm$  e  $-np-(m-l)=-g(m-l)$ , onde  $-(g+1)$  também é um inteiro.

Logo, o valor  $l'$  igual a  $m-l$  satisfaz a  $-np-l'$  múltiplo de  $m$ .

Como para cada harmônica  $n$ ,  $l$  e  $l'$  são únicos  $\Rightarrow l'=m-l$  e  $l'+l=m$ .

5) Os valores dos elementos não nulos de  $Lsr_n$  são iguais a  $\frac{\sqrt{3m}}{2}Lsr_n e^{jnp\phi}$  e  $\frac{\sqrt{3m}}{2}Lsr_n e^{-jnp\phi}$ , respectivamente, na 1ª e 2ª parcela, quando as expressões em  $a$  e em  $b$ , da matriz  $AM_nB^{-1}$ , são diferentes de zero.

6) O único caso em que as posições dos elementos de cada parcela coincidem, é quando satisfaz, simultaneamente,  $n=6s+3$  e  $np=gm$ , resultando em elementos na 1ª linha e 1ª coluna nas duas parcelas.

### III.2.3 Simplificação da representação da matriz de mútuas $L_{sr}$

Para simplificar a representação da matriz  $L_{sr} = \sum_{n=1}^{\infty} L_{sr_n} A_m B^{-1}$ , observa-se que substituindo valores negativos de  $n$  nas expressões da 1ª parcela de  $A_m B^{-1}$ , na forma mostrada em (III.37), obtém-se os elementos da 2ª parcela.

Assim, no lugar de dois somatórios de matrizes harmônicas  $L_{sr_n}$ , com  $n$  ímpar variando de 1 a  $\infty$ , pode-se representar a matriz  $L_{sr}$  por apenas um somatório de matrizes  $L_{sr_n}$ , onde  $n$  varia de  $-\infty$  a  $+\infty$ , como se mostra a seguir:

$$L_{sr} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} L_{sr_n} \frac{e^{jnp\phi}}{2\sqrt{3m}} \begin{bmatrix} (1+a^{-n}+a^{-2n}) \\ (1+a^{1-n}+a^{2-2n}) \\ (1+a^{2-n}+a^{1-2n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{m-1} b^{npk} & \sum_{k=0}^{m-1} b^{(np-1)k} & \dots & \sum_{k=0}^{m-1} b^{(np-(m-1))k} \end{bmatrix} \quad (\text{III.45})$$

#### Considerações sobre a nova representação da matriz $L_{sr}$ :

Não se pode esquecer que as harmônicas de força magnetomotriz, representadas neste modelo, são positivas, mesmo que, na nova representação, apareçam valores de  $n$  com sinais negativos. Este artifício de representação não significa a mudança de sinal das harmônicas. Na verdade, para que a expressão de  $L_{sr}$  mantenha a sua ordem de preenchimento das posições não nulas, o somatório principal deve ser realizado com a variação de  $n$ , alternadamente. Ou seja, toma-se  $n=1$  e depois  $n=-1$ . Toma-se  $n=3$  e depois  $n=-3$ . Segue-se este procedimento, até que todas as posições não nulas sejam preenchidas. No cálculo do parâmetro de indutância  $L_{sr_n}$ , entretanto, não se levará em conta o sinal de  $n$  porque na expressão da matriz  $L_{sr}$ , apresentada em (III.31), os valores de  $n$  são sempre positivos. Nos demais fatores da nova expressão de  $L_{sr}$ , não há essa preocupação porque na expressão de  $A_m B^{-1}$ , que foi separada em duas parcelas, já havia representações de valores de  $n$  com sinais positivos e negativos, como nas funções  $e^{jnp\phi}$  e  $e^{-jnp\phi}$ . E no caso das expressões em  $a$  e em  $b$ , que aparecem em (III.45), os sinais simétricos de  $n$  geram os mesmos elementos que na representação mais antiga.

Na representação anterior de  $L_{sr}$ , as harmônicas de sequência zero do estator ( $n=6s+3$ ) só correspondiam a elementos na primeira linha da matriz  $L_{sr}$ , enquanto as harmônicas de sequência positiva ( $n=6s+1$ ) ou negativa ( $6s-1$ ) podiam corresponder a elementos nas outras duas linhas. Antes, uma harmônica

de sequência positiva do estator ( $n=6s+1$ ) gerava um elemento na segunda linha da primeira parcela da matriz  $L_{sr}$  e outro elemento na terceira linha da segunda parcela. Com a nova representação, o elemento da segunda parcela é gerado pela harmônica simétrica ( $n=-6s-1$ ), que é de sequência negativa (do tipo  $6s-1$ ). Antes, uma harmônica de sequência negativa do estator ( $n=6s-1$ ) gerava um elemento na terceira linha da primeira parcela da matriz  $L_{sr}$  e outro elemento na segunda linha da segunda parcela. Com a nova representação, o elemento da segunda parcela é gerado pela harmônica simétrica ( $n=-6s+1$ ) que é de sequência negativa (do tipo  $6s+1$ ). Conclui-se, por tanto, que com a nova representação, os elementos da segunda linha são todos gerados por harmônicas de sequência positiva e os da terceira linha por harmônicas de sequência negativa, ficando os da primeira linha com harmônicas de sequência zero (todas as sequências relativas ao estator).

Outra consequência é que a relação entre colunas e harmônicas, agora, é dada somente por  $np-l=gm$ , que era uma das relações utilizadas na primeira parcela da antiga representação de  $L_{sr}$ . Substituir um  $n=n_o$ , positivo, na segunda expressão ( $-np-l=gm$ ) é equivalente a substituir um  $n=-n_o$ , negativo, na primeira expressão ( $np-l=gm$ ).

#### III.2.4 Redução da ordem do sistema de equações

Já é sabido que as expressões em  $a$  podem resultar em valor 3 ou zero, que as expressões em  $b$  podem ter valor  $m$  ou zero e que a matriz  $L_{sr}$  só tem elementos nas posições onde as expressões em  $a$  multiplicadas pelas expressões em  $b$  não são nulas. Como consequência, mostrou-se através da continuação do Exemplo III.1, para  $p=2$ , que a matriz  $L_{sr}$  pode ficar com diversas colunas totalmente nulas.

Por estes motivos, o sistema de equações pode ser representado, apenas, pelas equações que interrelacionam variáveis de estator e de rotor, através de indutâncias mútuas da matriz  $L_{sr}$ . São as duas equações do estator e as do rotor correspondentes às linhas não nulas da matriz  $L_{rs}$ . A solução do sistema não irá se alterar porque as demais equações relacionam tensões nulas de rotor com correntes de rotor, obtendo-se, em todas elas, a solução trivial nula.

Simbolicamente,  $L_{sr}$  pode ser representada da seguinte forma:

$$L_{sr} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & & \Sigma_{1r} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \dots & \Sigma_{2r} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & & \Sigma_{3r} \end{bmatrix}. \quad (III.46)$$

Onde o símbolo  $\Sigma_{ij}$  representa os somatórios das componentes harmônicas de indutância existentes nas posições não nulas, sendo cada componente harmônica dada por:

$$m_{\nu} = \frac{\sqrt{3m}}{2} e^{jnp\phi} \frac{4\mu_0 l R w K_{wn}}{\pi \delta (np)^2} \sin \frac{n\pi}{m} = M_{\nu} e^{jnp\phi}, \quad (\text{III.47})$$

sendo  $\nu=np$ .

### III.2.5 Eliminação dos somatórios da matriz $L_{sr}$

Como foi abordado no Exemplo III.1 e adotado na representação da matriz  $L_{sr}$  em (III.38), só se representará, em cada posição da matriz, uma indutância formada, apenas, por uma das componentes harmônica. Preferencialmente, esta indutância deve ser aquela de menor ordem entre as harmônicas presentes em cada um dos somatórios. Caso seja desejável a análise sobre um conjunto de harmônicas específicas, apenas estas devem ser representadas, desde que não ocupem as mesmas posições na matriz  $L_{sr}$ .

A representação dos elementos da matriz  $L_{sr}$  por somatórios de indutâncias, além de dificultar a representação da matriz, faz com que o sistema de equações se torne pouco operacional. Por isso no modelo matemático proposto, considera-se só as componentes harmônicas ímpares suficientes para preencherem todas as posições não nulas da matriz, sem deixar acumular termos com frequências harmônicas de ordens distintas em uma mesma posição. Ou seja, sem realizar qualquer somatório. A matriz, ainda assim, pode abranger a representação de elementos de indutâncias harmônicas de ordens consideravelmente elevadas, mantendo uma estrutura simples e, caracterizada por uma alta esparsidade. Esparsidade esta, dada pelas colunas nulas da matriz, consequência da distribuição das indutâncias de harmônicas ímpares que dependem da combinação entre o número de barras do rotor, o número de pólos e o número de fases do estator.

Com a nova representação da matriz  $L_{sr}$ , apresentada em (III.45), pode-se usar, também, a variável  $\nu=np$  para representar a harmônica de ordem  $n$ . Com isto, as duas características, número de barras e número de pólos, ficam representadas simultaneamente.

Exemplo III.2 - Seja uma máquina com 4 pólos,  $p=2$  e número de barras  $m=8$ .

Variando-se  $n$  nos dois sentidos, a partir de zero, na expressão da matriz  $l_{sr}$  dada em (III.45), tem-se:

número das colunas 0 1 2 3 4 5 6 7

$$\begin{aligned} n=-1 \Rightarrow M_{2e}^{-j2\phi} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ n=6s-1 \end{aligned}$$

0 1 2 3 4 5 6 7

$$\begin{aligned} n=1 \Rightarrow M_{2e}^{j2\phi} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ n=6s+1 \end{aligned}$$

número das colunas 0 1 2 3 4 5 6 7

$$\begin{aligned} n=-3 \Rightarrow M_{8e}^{-j8\phi} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ n=6s+3 \end{aligned}$$

0 1 2 3 4 5 6 7

$$\begin{aligned} n=3 \Rightarrow M_{8e}^{j8\phi} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ n=6s+3 \end{aligned}$$

numero das colunas 0 1 2 3 4 5 6 7

$$\begin{aligned} n=-5 \Rightarrow M_{10e}^{-j10\phi} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ n=6s+1 \end{aligned}$$

0 1 2 3 4 5 6 7

$$\begin{aligned} n=5 \Rightarrow M_{10e}^{j10\phi} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ n=6s-1 \end{aligned}$$

numero das colunas 0 1 2 3 4 5 6 7

$$\begin{aligned} n=-7 \Rightarrow M_{14e}^{-j14\phi} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ n=6s-1 \end{aligned}$$

0 1 2 3 4 5 6 7

$$\begin{aligned} n=7 \Rightarrow M_{14e}^{j14\phi} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ n=6s+1 \end{aligned}$$

e assim sucessivamente.

Neste exemplo, verifica-se que a partir de  $n=\pm 7$  os elementos começam a ocorrer em posições que já possuem elementos não nulos. Nestas posições, portanto, irão acumulando-se (ou somando-se) os elementos gerados.

Desta forma, tem-se na posição (3,6) o seguinte elemento:

$$\Sigma_{36} = M_2 e^{-j2\phi} + M_{22} e^{-j22\phi} + M_{26} e^{-j28\phi} + M_{46} e^{+j46\phi} + \dots$$

E nas posições (1,2), (1,6), (2,2), (2,6) e (3,2) ter-se-ão somatórios análogos. Nesse caso, o índice  $l$  das colunas varia de 0 a 7 e a ordem da harmônica é indicada por  $\nu=np$  como índice de  $M$ .

Adotando-se somente o 1º termo (ou primeira harmônica) de cada somatório o modelo permite levar em consideração harmônicas de ordem  $n=1$ ,  $n=3$  e  $n=5$ , ficando os elementos da matriz  $L_{sr}$  representados da seguinte forma:

$$\Sigma_{12} = M_8 e^{-j8\phi}, \Sigma_{18} = M_8 e^{j8\phi}, \Sigma_{22} = M_2 e^{j2\phi},$$

$$\Sigma_{28} = M_{10} e^{-j10\phi}, \Sigma_{32} = M_{10} e^{j10\phi}, \Sigma_{38} = M_2 e^{-j2\phi}.$$

Com o que foi exposto até aqui, já é possível montar a matriz  $L_{sr}$  para qualquer número de barras ou de pólos da máquina. Porém, para um tratamento mais geral desta matriz e para a definição da segunda transformação de variáveis que será estudada no Capítulo IV, é importante desenvolver uma expressão genérica para  $L_{sr}$ . Alguns passos serão necessários para se obter esta forma geral da matriz  $L_{sr}$ :

Na Seção III.3, deduz-se uma expressão para o cálculo do número de colunas não nulas da matriz  $L_{sr}$ ,

Na Seção III.4, estabelece-se uma coluna inicial e as harmônicas que nela ocorrem. São identificadas relações entre as demais harmônicas e colunas da matriz  $L_{sr}$  e, também, estabelecidas expressões generalizadas para todas as harmônicas que ocorrem na coluna inicial,

Na Seção III.5, serão estabelecidas as expressões gerais para as harmônicas e colunas localizadas nas laterais extremas da matriz  $L_{sr}$  e, finalmente a própria expressão geral da matriz  $L_{sr}$ .

### III.3 Número de Colunas não Nulas na Matriz de Mútuas

Foi visto anteriormente, que na matriz  $L_{sr}$ , apresentada em (III.45), as colunas não nulas eram determinadas quando os somatórios  $\sum_{k=0}^{m-1} b^{(np-1)k}$  resultavam em valores não nulos, ou seja, obtinha-se neles o valor  $m$ . Foi mostrado, também, que para cada harmônica só um desses somatórios seria não nulo. E isto ocorre para  $l$ , tal que  $np-l$  múltiplo de  $m$ .

Logo, existirá um elemento na coluna  $l$  correspondente a harmônica  $n$  se  $np-l=gm$ , para algum  $g = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Baseado nisto, o processo de determinação do número de colunas da matriz  $L_{sr}$  é desenvolvido, usando-se a enumeração das harmônicas ímpares e das colunas relacionadas.



Inicia-se pela harmônica  $n=1$  que está na coluna  $l=p$ . Passa-se para  $n=3$  com  $l=3p$ . Depois para  $n=5$  com  $l=5p$ . E assim por diante.

Esta enumeração é seguida até que para um  $n=2t'+1$ ,  $l=(2t'+1)p \geq m$ . Isto pode ocorrer até para  $n=3$ .

Quando  $(2t'+1)p$  ultrapassa o valor de  $m$ , faz-se  $g=1$ . Ou seja, daí por diante,  $l=np-m$ .

Até  $n=2t'+1$  foram relacionadas  $t'+1$  colunas, correspondente à variação de  $t$ , de 0 até  $t'$ .

As harmônicas e colunas ficam caracterizadas por séries de diferentes valores de  $g$ .

Continuando-se a variar  $n$  e a relacionar colunas não nulas, relacionam-se os  $l$ 's a partir de  $l=(2t'+1)p-m$ ,  $l=(2t'+3)p-m$ , etc. Quando  $(2t''+1)p-m \geq m$ , faz-se  $g=2$  e até aqui ter-se-á relacionado  $t''+1$  colunas.

Daí por diante,  $l=np-2m$ .

Pode-se continuar o processo até que todas as colunas tenham sido relacionadas. Ou seja, até que as colunas já relacionadas comecem a se repetir.

No momento em que acontece a primeira repetição, ou seja, o mesmo  $l$  é encontrado em duas séries de diferentes valores de  $g$ , caracterizadas por  $g_1$  e  $g_0$ , tal que  $l=n_1p-g_1m$  e  $l=n_0p-g_0m$ , para as harmônicas  $n_1$  e  $n_0$ , onde:  $n_1 > n_0$  e  $g_1 > g_0 \geq 0$ , esta repetição deve acontecer, necessariamente, para  $l=p$ .

Demonstra-se:

Nas duas expressões de  $l$ , subtrai-se duas unidades de  $n_1$  e  $n_0$ . Isto significa regredir para harmônicas de ordens menores.

$$l'=(n_1-2)p-g_1m=(n_0-2)p-g_0m$$

A igualdade permanece, porém o valor de  $l$  mudou.

Faz-se esta redução de  $n$ , de forma sucessiva, mantendo-se a igualdade e variando-se o valor de  $l$ :

$$l''=(n_1-2i)p-g_1m=(n_0-2i)p-g_0m, i=1,2,\dots$$

As novas igualdades mostram que já existiam repetições anteriores nas mesmas séries de  $g_1$  e  $g_0$ .

Quando  $(n_0-2i)p-g_0m < 0$ , soma-se  $m$  às duas expressões comparadas:

$$(n_1-2i)p-g_1m+m=(n_0-2i)p-g_0m+m$$

O lado direito pode ser escrito por  $l=(n_0-2i)p-(g_0-1)m$ , mostrando que já existiam repetições em séries anteriores de  $g$ .

Continuar-se-á a reduzir duas unidades nos valores de  $n_1$  e  $n_0$  (ou aumentar 1) nas duas expressões de  $l$ , reduzindo-se os valores de  $g_1$  e  $g_0$ , quando as expressões de  $l$  se tornarem negativas, até que  $g_0-j=0$ .

Quando isto acontece  $(n_1-2i)p-(g_1-j)m=(n_0-2i)p$ , caracterizando uma repetição entre uma série com  $g$  igual  $g_1-j$  e a primeira série de  $g=0$ .

Continuando-se a diminuir  $2p$  de cada lado (ou aumentar 1), tem-se no final  $n_2p-gm=p$ , alcançando o menor valor de  $n_0-2i$  ( $n=1$ ) na expressão de  $l$  do lado direito.

Assim  $n_2$  é a primeira harmônica posicionada em uma coluna já relacionada, sendo que essa primeira repetição se dá na coluna  $l=p$ , relacionada pela harmônica  $n=1$ .

Como a formação de  $n$  é  $n=2t+1$ , para se atingir a harmônica  $n_2$ ,  $t$  foi variado de 0 até um certo  $t_2$ , relacionando-se um número de colunas, ou de  $l$ 's, igual a  $t_2+1$ , incluindo a coluna de repetição. Desta forma, o número  $r$  de colunas não nulas é igual a  $t_2$  e pode ser calculado da seguinte maneira:

$$(2r+1)p-gm=p \Rightarrow 2rp=gm \Rightarrow r=\frac{gm}{2p}, \quad (\text{III.48})$$

onde:  $g$  é o menor inteiro maior que zero que torna  $r$  inteiro e  
 $r$  é o número de colunas não nulas da matriz.

#### III.4 Relação Entre os Elementos Não Nulos na Matriz $L_{sr}$

##### Elementos da coluna inicial:

Um elemento da matriz  $L_{sr}$ , relativo à harmônica  $n$ , está posicionado em uma coluna  $l$ , se a ordem da harmônica  $n$  e a coluna  $l$  são relacionadas por  $np-l=gm$ , para algum  $g$  inteiro.

Para a harmônica  $n=1$ , a expressão  $np-l=gm$  é satisfeita com  $g=0$ ,  $l=p$  e qualquer  $m$ . Isto mostra que o elemento da harmônica  $n=1$ , sempre fica posicionado na coluna  $l=p$ , independente do número de barras da máquina. Como a fundamental é de sequência positiva para o sistema de fases do estator (do tipo  $6s+1$ ), ela representa um elemento na segunda linha da matriz  $L_{sr}$ .

A coluna  $l=p$ , pode ser tomada, de uma forma geral, como ponto de partida para geração dos outros elementos. Porém, dependendo dos valores de  $m$  e  $p$ , esta coluna pode ter elementos nas outras linhas ou não.

Para que existam os elementos nas outras duas linhas da coluna  $l=p$ , basta que a relação  $np-l=gm$  seja satisfeita para algum  $g$  inteiro e algum  $n$  de

sequência zero, do tipo  $n=6s+3$ , e para um  $g'$  inteiro e um  $n'$  de sequência negativa, do tipo  $n'=6s-1$ , relativas ao estator.

Se existe elemento na coluna  $l=p$  e na primeira linha da matriz  $L_{sr}$ , então  $n=6s+3$  e  $l=np-gm$ . Logo,  $p=(6s+3)p-gm$  e  $gm$  será múltiplo de  $p$ . Os menores valores de  $gm$  que satisfazem esta condição são  $gm=\pm 2rp$ , sendo  $r$  o número de colunas não nulas na matriz  $L_{sr}$ .

Desta forma,  $p=(6s+3)p\mp 2rp$ , que resulta em:

$$s=\frac{(r-1)}{3}, \text{ para } gm=2rp \text{ e } s=-\frac{(r+1)}{3}, \text{ para } gm=-2rp.$$

Se existe elemento na coluna  $l=p$  e na terceira linha da matriz  $L_{sr}$ , então  $n=6s-1$  e  $l=np-gm$ . Logo,  $p=(6s-1)p-gm$  e  $gm$  será múltiplo de  $p$ . Fazendo uso, novamente de  $gm=\pm 2rp$ , tem-se  $p=(6s-1)p\mp 2rp$ , que resulta em:

$$s=\frac{(r+1)}{3}, \text{ para } gm=2rp \text{ e } s=-\frac{(r-1)}{3}, \text{ para } gm=-2rp.$$

A relação entre  $s$  e  $r$  pode ser generalizada para as duas linhas pela expressão:  $s=\pm\frac{r+h}{3}$ , com  $h=\pm 1$ .

Como  $s$  e  $r$  são inteiros, as relações acima envolvendo  $s$  e  $r$  só são satisfeitas quando  $r$  não é divisível por 3. Isto quer dizer, que se  $r$  for divisível por 3, só a 2ª linha possuirá elementos na coluna  $l=p$ .

Assim, uma vez calculado  $r=\frac{gm}{2p}$ , verifica-se a existência de elementos na coluna  $l=p$  nas três linhas, apenas verificando se  $r$  é ou não múltiplo de 3.

Uma vez confirmada, calcula-se  $s=\pm\frac{r+h}{3}$  com o valor de  $h$  que torne  $s$  inteiro.

Se  $h=+1$ , determina-se  $s_1=-\frac{r+h}{3}$ , para  $n_1=6s_1+3$  na primeira linha e  $s_3=+\frac{r+h}{3}$ , para  $n_3=6s_3-1$  na terceira linha.

Se  $h=-1$ , determina-se  $s_1=\frac{r+h}{3}$ , para  $n_1=6s_1+3$  na primeira linha e  $s_3=-\frac{r+h}{3}$ , para  $n_3=6s_3-1$  na terceira linha.

Caso não existam elementos nas três linhas da coluna  $l=p$ , determina-se os primeiros elementos de cada linha em colunas distintas, fazendo-se, por exemplo,  $s=0$ , nas expressões  $6s+3$ ,  $6s+1$  e  $6s-1$ . Isto dará  $n=3$  na 1ª linha,  $n=1$  na segunda e  $n=-1$  na terceira. Estas são as menores harmônicas de cada linha e correspondem às seguintes colunas:

$$n=3 \text{ ou } v=3p \Rightarrow l=3p \text{ (caso } m < 3p \Rightarrow l=3p-m)$$

$$n=1 \text{ ou } \nu=p \Rightarrow l=p$$

$$n=-1 \text{ ou } \nu=-p \Rightarrow l=m-p$$

#### Harmônicas dos elementos das demais colunas:

As harmônicas podem ser divididas nos grupos  $(6s+3)$ ,  $(6s+1)$  e  $(6s-1)$ , variando de 6 em 6 quando  $s$  varia de unidade em unidade.

Quando em uma linha a harmônica é variada de  $n$  para  $n+6$ , muda-se da coluna  $l=np-gm$  para a coluna  $l'=(n+6)p-gm=np-gm+6p$ , ou seja, a coluna varia de  $6p$  em  $6p$ .

Uma vez encontrado os primeiros elementos da coluna  $l=p$  ou de 3 colunas diferentes (caso  $r$  seja múltiplo de 3), determina-se as outras colunas e os seus elementos da seguinte forma:

- Soma-se 6 à harmônica do elemento conhecido e  $6p$  ao número da coluna conhecida, encontrando-se um novo elemento em uma nova coluna.
- Quando o número da coluna ultrapassar  $m-1$ , que é a última coluna da matriz, subtrai-se  $m$  do valor de  $l$  encontrado porque  $l$  deve satisfazer a relação  $l=np-gm$ . Isto significa tomar um novo  $g$  igual ao anterior mais um ( $g'=g+1$ ).
- Pode-se partir para o outro lado, subtraindo 6 da harmônica do elemento conhecido e  $6p$  do número da coluna correspondente. Quando  $l$  se tornar negativo, soma-se  $m$  ao número da coluna.
- O procedimento termina quando estão determinadas as harmônicas correspondentes às  $r$  colunas da matriz.

Exemplo III.3 Número de barras  $m=24$  e número de par de polos  $p=2$ .

$r = \frac{g \times 24}{2 \times 2} = 6$  para  $g=1 \Rightarrow r$  é múltiplo de 3  $\Rightarrow$  diz-se que  $h=0$  e só a segunda linha possui elemento na coluna  $l=p=2$  que corresponde a harmônica  $n=1$  ou  $\nu=np=2$ .

Determina-se os primeiros elementos das outras linhas, fazendo-se  $s=0$ :

A primeira harmônica da 1ª linha é  $n=6 \times 0 + 3 = 3$  ou  $\nu=6$  e a coluna correspondente é  $l=3 \times 2 - g \times 24 = 6$ , para  $g=0$ .

A primeira harmônica da 3ª linha é  $n=6 \times 0 - 1 = -1$  ou  $\nu=-2$  e a coluna correspondente é  $l=-1 \times 2 - g \times 24 = 22$ , para  $g=1$ .

As demais harmônicas são identificadas somando-se ou subtraindo-se 6 às já identificadas e as demais colunas podem ser relacionadas somando-se ou

subtraindo-se  $6p=12$  às 3 primeiras já definidas. Sempre que a soma for maior ou igual a  $m$ , subtrai-se  $m=24$  e sempre que a diferença for negativa, soma-se  $m=24$ .

Para harmônicas da primeira linha, com  $n=6s+3$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 s=0 &\Rightarrow n=3 &\Rightarrow v=6 &\Rightarrow l=6 \\
 s=1 &\Rightarrow n=3+6=9 &\Rightarrow v=6+6p=18 &\Rightarrow l=6+6p=18 \\
 s=2 &\Rightarrow n=9+6=15 &\Rightarrow v=18+6p=30 &\Rightarrow l=18+6p=30 > 24 \Rightarrow l=30-24=6 \text{ (já relacionada)} \\
 s=-1 &\Rightarrow n=3-6=-3 &\Rightarrow v=6-6p=-6 &\Rightarrow l=6-6p=-6 < 0 \Rightarrow l=-6+24=18 \text{ (já relacionada)} \\
 s=-2 &\Rightarrow n=-3-6=-9 &\Rightarrow v=-6-6p=-18 &\Rightarrow l=18-6p=6 \text{ (já relacionada)}
 \end{aligned}$$

Para harmônicas da segunda linha, com  $n=6s+1$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 s=0 &\Rightarrow n=1 &\Rightarrow v=2 &\Rightarrow l=p=2 \\
 s=1 &\Rightarrow n=1+6=7 &\Rightarrow v=2+6p=14 &\Rightarrow l=2+6p=14 \\
 s=2 &\Rightarrow n=7+6=13 &\Rightarrow v=14+6p=26 &\Rightarrow l=14+6p=26 > 24 \Rightarrow l=26-24=2 \text{ (já relac.)} \\
 s=-1 &\Rightarrow n=1-6=-5 &\Rightarrow v=2-6p=-10 &\Rightarrow l=2-6p=-10 < 0 \Rightarrow l=-10+24=14 \text{ (já relac.)} \\
 s=-2 &\Rightarrow n=-5-6=-11 &\Rightarrow v=-10-6p=-22 &\Rightarrow l=14-6p=2 \text{ (já relacionada)}
 \end{aligned}$$

Para harmônicas da terceira linha, com  $n=6s-1$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 s=0 &\Rightarrow n=-1 &\Rightarrow v=-2 &\Rightarrow l=-2 < 0 &\Rightarrow l=-2+24=22 \\
 s=1 &\Rightarrow n=-1+6=5 &\Rightarrow v=-2+6p=10 &\Rightarrow l=22+6p=34 > 24 &\Rightarrow l=34-24=10 \\
 s=2 &\Rightarrow n=5+6=11 &\Rightarrow v=10+6p=22 &\Rightarrow l=10+6p=22 \text{ (já relacionada)} \\
 s=-1 &\Rightarrow n=-1-6=-7 &\Rightarrow v=-2-6p=-14 &\Rightarrow l=22-6p=10 \text{ (já relacionada)} \\
 s=-2 &\Rightarrow n=-7-6=-13 &\Rightarrow v=-14-6p=-26 &\Rightarrow l=10-6p=-2 < 0 &\Rightarrow l=-2+24=22 \text{ (já relac.)}
 \end{aligned}$$

Como a proposta do modelo é tomar uma harmônica em cada posição não nula, a distribuição das harmônicas ficará com o seguinte aspecto:

2	6	10	14	18	22
0	6	0	0	-6	0
2	0	0	-10	0	0
0	0	10	0	0	-2

Neste caso o modelo levaria em conta até a 5<sup>a</sup> harmônica.

Exemplo III.4  $m = 14$  e  $p = 2$

$$r = \frac{g \times 14}{2 \times 2} = \frac{2 \times 14}{4} = 7 \text{ para } g=2 \Rightarrow r \text{ não é divisível por } 3 \Rightarrow s = \pm \frac{7+h}{3}.$$

Para que  $s$  seja inteiro,  $h=-1 \Rightarrow$  a coluna  $l=p$  possui elementos em todas as linhas.

$s=2$  para a 1ª linha,  $s=0$  para a 2ª linha e  $s=-2$  para a 3ª linha  $\rightarrow$   
 $n_1=6 \times 2 + 3 = 15$ ,  $n_2=1$  e  $n_3=6 \times (-2) - 1 = -13$ .

Partindo-se da coluna  $l=p$ , calcula-se os demais elementos e colunas correspondentes da matriz, utilizando-se os procedimentos descritos anteriormente e relacionando-se elementos e colunas no lado esquerdo e no lado direito da coluna  $l=p$ , como representado abaixo:

2	14	12	10	8	6	4	colunas	2	0	12	10	8	6	4
-54	-42	-30	-18	-6	6	18	linha 1	30	42	54	66	78	90	102
-82	-70	-58	-46	-34	-22	-10	linha 2	2	14	26	38	50	62	74
-110	-98	-86	-74	-62	-50	-38	linha 3	-26	-14	-2	10	22	34	46

Tomando-se apenas uma harmônica em cada posição, tem-se:

6	4	2	0	12	10	8
6	18	30	42	54	66	78
-22	-10	2	14	26	38	-34
+34	-38	-26	-14	-2	10	22

Obtém-se, assim uma matriz um pouco mais cheia que no exemplo anterior (com  $r$  múltiplo de 3), porém com maior representação de harmônicas. No caso, considerou-se até a 19ª harmônica.

Exemplo III.5  $m = 20$  e  $p = 2$

$$r = \frac{1 \times 20}{4} = 5 \text{ e } g=1 \Rightarrow s = \pm \frac{5+h}{3} \Rightarrow$$

$h=1$  e  $s=-2$  para a 1ª linha e  $s=2$  para a 3ª linha  $\rightarrow$   
 $n_1=6(-2)+3=-9$ ,  $n_2=1$  e  $n_3=6 \times (2) - 1 = 11 \rightarrow$

2	14	8	18	10	2	14	8	18	10
-78	-66	-54	-42	-30	-18	-6	6	18	30
-58	-46	-34	-22	-10	2	14	26	38	50
-38	-26	-14	-2	10	22	34	46	58	70

Tomando-se só uma harmônica por posição:

8	18	10	2	14
-54	-42	-30	-18	-6
-34	-22	-10	2	14
-14	-2	10	22	34

Expressões gerais para as primeiras harmônicas da coluna  $l=p$ :

Quando  $h=-1$ , as harmônicas na coluna  $l=p$  são:

1<sup>a</sup> linha:

$$\begin{aligned} \nu &= np = (6s+3)p = \left[ 6\left(\frac{r+h}{3}\right) + 3p \right] = 2rp + 2hp + 3p = p + 2rp = p + gm \Rightarrow \\ \nu &= p - hgm \end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

2<sup>a</sup> linha:

$$\nu = p \quad (\text{III.50})$$

3<sup>a</sup> linha:

$$\begin{aligned} \nu &= np = (6s-1)p = \left[ -6\left(\frac{r+h}{3}\right) - 1 \right] p = -2rp - 2hp - p = p - 2rp = p - gm \Rightarrow \\ \nu &= p + hgm \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

Quando  $h=+1$ , as harmônicas na coluna  $l=p$  são:

1<sup>a</sup> linha:

$$\begin{aligned} \nu &= np = (6s+3)p = \left[ -6\left(\frac{r+h}{3}\right) + 3 \right] p = -2rp - 2hp + 3p = p - 2rp = p - gm \Rightarrow \\ \nu &= p - hgm \quad (\text{a mesma expressão encontrada para } h=-1) \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

2<sup>a</sup> linha:

$$\nu = p \quad (\text{III.53})$$

3<sup>a</sup> linha:

$$\begin{aligned} \nu &= np = (6s-1)p = \left[ 6\left(\frac{r+h}{3}\right) - 1 \right] p = 2rp + 2hp - p = p + 2rp = p + gm \Rightarrow \\ \nu &= p + hgm \quad (\text{a mesma expressão encontrada para } h=-1) \end{aligned} \quad (\text{III.54})$$

Quando  $h=0$ , as harmônicas na coluna  $l=p$  só aparecem na 2<sup>a</sup> linha com:

$$\nu = p.$$

Assim, independente do valor de  $h$ , as primeiras harmônicas da coluna  $l=p$  são:

$n=p-hgm$  na primeira linha,

$n=p$  na segunda linha e

$n=p+hgm$  na terceira.

**Expressões gerais para as demais harmônicas da coluna  $l=p$ :**

É possível obter-se expressões gerais, também, para as outras harmônicas que ocorrem na coluna  $l=p$ , nas mesmas posições ocupadas pelas harmônicas já determinadas.

Como em uma mesma linha, de coluna para coluna, as harmônicas variam de  $6p$  em  $6p$ , após  $r$  colunas retorna-se para a coluna  $l=p$  e a nova harmônica nesta coluna, será a anterior somada (ou subtraída) de  $6pr$ . Desta forma, as harmônicas da coluna  $l=p$  podem ser identificadas pelas seguintes expressões:

$n=p-hgm+6prq$  na primeira linha,

$n=p+6prq$  na segunda linha e

$n=p+hgm+6prq$  na terceira,

onde  $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , é o número de retornos completos à coluna  $l=p$ .

No caso em que  $r$  é divisível por 3 e só a linha 2 tem elementos na coluna  $l=p$ , ao retornar-se para a esta coluna, somando-se (ou subtraindo-se)  $6p$  sucessivamente, ter-se-á passado só por  $r/3$  colunas. Isto ocorre porque a cada linha corresponde um terço dos elementos distribuídos em um terço das colunas.

Neste caso, a expressão  $n=p+2prq$  identifica todas as harmônicas da coluna  $l=p$ , na segunda linha.

A Tabela III.1, relaciona as expressões gerais das harmônicas da coluna  $l=p$  em todas as linhas e para todos os valores de  $h$ . O parâmetro  $\nu_t$  utilizado é representado pela seguinte expressão:

$$\nu_t = (2+4|h|)pr \quad (\text{III.55})$$



Tabela III.1 - Harmônicas da coluna  $l=p$ 

	$h=0$	$h=\pm 1$
1	—	$p-hgm+qvt$
2	$p+qvt$	$p+qvt$
3	—	$p+hgm+qvt$

### III.5 Colunas Laterais Extremas de $L_{sr}$

A determinação de expressões gerais para identificação das colunas laterais extremas e dos seus elementos é, obviamente, necessária para a obtenção da expressão geral da matriz  $L_{sr}$  e pode, também, ser muito importante para programação computacional.

Os elementos da coluna  $l=p$  são:  $v=p$  na 2<sup>a</sup> linha e  $v=p+hgm$  na 3<sup>a</sup> linha.

Se  $\alpha_0$  é o número de colunas não nulas à esquerda da coluna  $l=p$ , as harmônicas da coluna extrema à esquerda são:  $v=p+\alpha_0 6p$  na 2<sup>a</sup> linha e  $v=p+hgm-\alpha_0 6p$  na 3<sup>a</sup> linha.

Se  $\beta_0$  é o número de colunas não nulas à direita da coluna  $l=p$ , as harmônicas da coluna extrema à direita são:  $v=p+\beta_0 6p$  na 2<sup>a</sup> linha e  $v=p+hgm+\beta_0 6p$  na 3<sup>a</sup> linha.

A relação entre  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  é, obviamente,  $\alpha_0 + \beta_0 + 1 = r$ .

Nos exemplos, pode-se observar que a harmônica da segunda linha na coluna extrema esquerda é simétrica à harmônica da terceira linha na coluna extrema direita e vice-versa.

Então:  $p-\alpha_0 6p = -(p+hgm+\beta_0 6p)$  e  $p+\beta_0 6p = -(p+hgm-\alpha_0 6p)$ .

As duas equações são equivalentes a:

$$(\alpha_0 - \beta_0)6p - 2p = hgm, \quad (III.56)$$

que junto com a relação entre  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  e  $r$ , formam o seguinte sistema:

$$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha_0 - \beta_0)6p = 2p + hgm \\ \alpha_0 + \beta_0 = r - 1 \end{cases} \quad (III.57)$$

Resolvendo-se:

$$\alpha_o = \frac{(3+h)r-2}{6} \quad \text{e} \quad \beta_o = \frac{(3-h)r-4}{6} \quad (\text{III.58})$$

Substituindo-se  $\alpha_o$  e  $\beta_o$  nas expressões das harmônicas limites, tem-se:

$$2^{\text{a}} \text{ linha:} \quad v_e = p - \left[ \frac{(3+h)r-2}{6} \right] 6p = 3p - \frac{(3+h)}{2} gm \quad (\text{III.59})$$

$$v_d = p + \left[ \frac{(3-h)r-4}{6} \right] 6p = -3p + \frac{(3-h)}{2} gm \quad (\text{III.60})$$

$$3^{\text{a}} \text{ linha:} \quad v_e = p + hgm - \left[ \frac{(3+h)r-2}{6} \right] 6p = 3p - \frac{(3-h)}{2} gm \quad (\text{III.61})$$

$$v_d = p + hgm + \left[ \frac{(3-h)r-4}{6} \right] 6p = -3p + \frac{(3+h)}{2} gm \quad (\text{III.62})$$

Retorna-se aos exemplos para verificação das fórmulas.

No Exemplo III.4:  $m=14$  e  $p = 2 \Rightarrow g = 2$  e  $h = -1$

2<sup>a</sup> linha:

$$v_e = 3 \times 2 - \frac{(3-1)}{2} \times 2 \times 14 = 6 - 28 = -22$$

$$v_d = -3 \times 2 + \frac{(3+1)}{2} \times 2 \times 14 = -6 + 56 = 50$$

3<sup>a</sup> linha:

$$v_e = 3 \times 2 - \frac{(3+1)}{2} \times 2 \times 14 = 6 - 56 = -50$$

$$v_d = -3 \times 2 + \frac{(3-1)}{2} \times 2 \times 14 = -6 + 28 = 22$$

No exemplo III.4:  $m = 20$  e  $p = 2 \Rightarrow g = 1$  e  $h = 1$

2ª linha:

$$v_e = 3 \times 2 - \frac{(3 + 1)}{2} \times 1 \times 20 = 6 - 40 = -34$$

$$v_d = -3 \times 2 + \frac{(3 - 1)}{2} \times 1 \times 20 = -6 + 20 = 14$$

3ª linha:

$$v_e = 3 \times 2 - \frac{(3 - 1)}{2} \times 1 \times 20 = 6 - 20 = -14$$

$$v_e = -3 \times 2 + \frac{(3 + 1)}{2} \times 1 \times 20 = -6 - 40 = -46$$

**Expressões para colunas laterais extremas:**

Para  $h = \pm 1$ , as colunas limites são  $l_e = (p - \alpha_0 6p) \pmod{m}$  e  $l_d = (p + \beta_0 6p) \pmod{m}$ , onde  $\pmod{m}$  significa o resto inteiro (não negativo) da divisão por  $m$ . É o que resulta quando realizamos a operação  $np - gm$  que pode ser ilustrada pela operação de divisão esquematizada abaixo:

$$l = np - gm \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r|l} np & m \\ \hline -gm & g \\ \hline l & \end{array}$$

Substituindo-se  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  nas expressões de  $l_e$  e  $l_d$ , tem-se:

$$l_e = \left[ 3p - \frac{(3+h)}{2} gm \right] \pmod{m} = 3p \pmod{m} \text{ e} \quad (\text{III.64})$$

$$l_d = \left[ -3p - \frac{(3-h)}{2} gm \right] \pmod{m} = -3p \pmod{m} \quad (\text{III.65})$$

Para os Exemplos III.4 e III.5 as colunas limites podem ser calculadas:

$$m = 14 \text{ e } p = 2 \Rightarrow l_e = 6 \pmod{14} = 6 \text{ e } l_d = -6 \pmod{14} = 8$$

$$m = 20 \text{ e } p = 2 \Rightarrow l_e = 6 \pmod{20} = 6 \text{ e } l_d = -6 \pmod{20} = 14$$

Se  $m \geq 3p$ , a 1ª coluna sempre será  $3p$  e a última  $m - 3p$ .

Observando-se as colunas equidistantes do centro da matriz  $L_{sr}$ , na ordem em que foram descobertas, vê-se que a soma de seus índices dá sempre  $m$ . Este resultado pode ajudar na verificação das colunas relacionadas.

Prova:

Sejam  $l_1$  e  $l_2$  colunas equidistantes das extremidades  $\Rightarrow$

$$l_1 = (p - \alpha_0 6p + q6p) \pmod{m} \text{ e } l_2 = (p + \beta_0 6p - q6p) \pmod{m},$$

onde  $q$  é um fator inteiro que representa a equidistância em número de colunas em relação às colunas laterais extremas.

Substituindo-se as expressões de  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  nas de  $l_1$  e  $l_2$ , tem-se:

$$l_1 = \left[ 3p - \frac{(3+h)}{2} gm + q6p \right] \pmod{m} \text{ e}$$

$$l_2 = \left[ -3p + \frac{(3-h)}{2} gm - q6p \right] \pmod{m}.$$

O termo em função de  $h$  é divisível por  $m$ , logo não contribui significativamente para o resto, sobrando os termos  $3p+q6p$  e  $-3p-q6p$ .

Assim,

$$l_1 = (3p+q6p) \pmod{m} \text{ e } l_2 = (-3p-q6p) \pmod{m}. \Rightarrow$$

$$l_1 = (3p+q6p) - gm, \text{ onde } g \text{ é o quociente da divisão de } 3p+q6p \text{ por } m \text{ e}$$

$$l_2 = (-3p-q6p) - g'm, \text{ onde } g' \text{ é o quociente da divisão de } -3p-q6p \text{ por } m.$$

Supondo que  $3p+q6p > m$ :

Como  $l_1$  é positivo,  $3p+q6p \geq gm$  e como  $g$  é o quociente da divisão de  $3p+q6p$  por  $m \Rightarrow gm \leq 3p+q6p \leq (g+1)m$ .

Como  $l_2$  é positivo,  $-g'm \geq 3p+q6p$  e como  $g'$  é o quociente da divisão de  $-3p-q6p$  por  $m \Rightarrow g' < 0$  e  $-g'm \geq 3p+q6p \geq -(g'+1)m$

Das relações acima, deduz-se que  $-g'm \geq 3p+q6p \geq gm$ . Logo não existe inteiro entre  $-g'$  e  $g$ . Se existisse, um dos divisores de  $3p+q6p$  ou de  $-3p-q6p$  não seria  $g$  ou  $g'$ .

Desta forma,  $-g'$  e  $g$  são inteiros consecutivos, ou seja:  $-g'=g+1$ .

Assim  $l_1=3p+q6p-gm$  e  $l_2=(g+1)m-3p-q6p$ , cuja soma dá  $l_1+l_2=m$

Se  $3p+q6p < m$ :

O quociente  $g$  se torna zero, ou seja  $3p+q6p$  é o próprio resto. Ou seja,  $l_1=3p+q6p$  e  $0 \leq 3p+q6p \leq m$ .

Se  $3p+q6p < m$ , da divisão de  $-3p-q6p$  por  $m$ , obtém-se o quociente  $g' < 0$ , de tal forma que:  $3p+q6p \leq -g'm$ . Logo,  $g'=-1$  e  $-g'=g+1$ .  $\Rightarrow$  Novamente,  $l_1+l_2=(3p+q6p)+(m-3p-6p)=m$  cqd.

Aplicando-se a relação, as colunas  $3p(\text{mod } m)$  e  $-3p(\text{mod } m)$  somadas são iguais a  $m$  e o mesmo acontece com  $9p(\text{mod } m)$  e  $-9p(\text{mod } m)$ .

Se existe a coluna  $p(\text{mod } m)$ , existe também a  $-p(\text{mod } m)$  porque somadas são iguais a  $wm$  e, se existe  $7p(\text{mod } m)$ , existe também a coluna  $-7p(\text{mod } m)$

Desde que os elementos da matriz de indutâncias mútuas são da forma  $M_{\nu} e^{j\nu\phi}$ , sendo  $\nu=np\phi$  e  $M_{\nu}=\frac{\sqrt{3m}}{2} \frac{4\mu_0 l R w K_{wn}}{\pi \delta (np)^2 F S M K_c} \sin\frac{n\pi}{2} \sin\frac{np\pi}{m}$ , pode-se representar a matriz de mútuas apenas pelas harmônicas relacionadas aos elementos.

Fazendo-se uso das expressões desenvolvidas neste capítulo para identificar as colunas não nulas e as harmônicas ímpares correspondentes na matriz de mútuas, expressa-se, através da matriz mostrada em (III.65), uma lei de formação para estas harmônicas e colunas não nulas, representando indiretamente a lei de formação dos verdadeiros elementos da matriz de indutâncias mútuas.

$$\begin{array}{l} \text{coluna} \rightarrow |3p(\text{mod } m)| |9p(\text{mod } m)| \quad | -5p(\text{mod } m)| |p(\text{mod } m)| |7p(\text{mod } m)| \dots \\ \text{seq } + \left[ \begin{array}{c|c|c} +3p-\frac{3+h}{2}gm & +9p-\frac{3+h}{2}gm & \dots \\ \hline -5p & p & 7p & \dots \end{array} \right. \\ \text{seq } - \left[ \begin{array}{c|c|c} +3p-\frac{3-h}{2}gm & +9p-\frac{3-h}{2}gm & \dots \\ \hline -5p+hgm & +p+hgm & +7p+hgm & \dots \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | -9p(\text{mod } m)| | -3p(\text{mod } m)| \\ \left[ \begin{array}{c|c} -9p+\frac{3-h}{2}gm & -3p+\frac{3-h}{2}gm \\ \hline -9p+\frac{3+h}{2}gm & -3p+\frac{3+h}{2}gm \end{array} \right] \end{array} \quad (III.66)$$

### III.6 Conclusões

Os efeitos da aplicação da transformação em componentes simétricas no sistema de variáveis originais foram mostrados neste capítulo. O sistema de variáveis resultante é representado por dois conjuntos de variáveis que estão associados às estruturas do estator e do rotor respectivamente. O conjunto associado ao estator contém uma variável de sequência positiva e outra de sequência negativa, cabendo ao conjunto associado ao rotor um número de

variáveis igual a  $r$ , englobando componentes de sequência positiva, de sequência negativa e outras componentes de sequências compatíveis com o sistema polifásico do rotor. Das matrizes resultantes no novo sistema, a que ainda pode representar algum ponto de dificuldade na solução de condições transitórias é a matriz de indutâncias mútuas. Esta matriz, contém elementos variantes no tempo, exigindo a sua inversão a cada passo de integração do método numérico utilizado na solução de transitórios. Por este motivo, uma outra transformação deve ser aplicada ao sistema de equações em variáveis de componentes simétricas para produzir um novo sistema com todas as matrizes formadas por elementos constantes em relação ao tempo. Esta transformação deve ser proposta a partir da expressão geral da matriz de mútuas no sistema de variáveis de componentes simétricas, mostrada em (III.66).

## CAPÍTULO IV

### SISTEMA DE EQUAÇÕES A COEFICIENTES CONSTANTES

#### IV.1 Justificativa da Transformação

A representação do sistema de equações, após a transformação de componentes simétricas, pode ser feita pela seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss} & 0 \\ 0 & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}, \quad (IV.1)$$

onde as matrizes  $R_{ss}$ ,  $L_{ss}$ ,  $R_{rr}$ ,  $L_{rr}$  e  $L_{sr}$  foram calculadas no Capítulo III e a matriz  $L_{rs}$  é o resultado da operação  $B L_{sr}^t A^{-1}$  que é igual a  $L_{sr}^{t*}$ , como mostrado no Apêndice A.

O sistema de equações, expresso em variáveis originais ou em variáveis de componentes simétricas, é, efetivamente, um sistema de equações diferenciais, cuja solução analítica se encontra normalmente pelo uso de um método numérico de integração. Os métodos de integração, normalmente empregados, exigem a formulação do sistema de equações da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{ss} & 0 \\ 0 & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} - \left( \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \right\}. \quad (IV.2)$$

Com esta formulação, as derivadas das correntes são calculadas a cada passo de integração, utilizando-se, no instante considerado, os valores das correntes, das tensões e das indutâncias mútuas contidas em  $L_{sr}$  e  $L_{rs}$ . As variações das correntes são combinadas com os intervalos de tempo pré-estabelecidos, por fórmulas específicas do método utilizado, para encontrar-se os valores das correntes dos passos seguintes. Os valores de tensões podem ser calculados, a qualquer instante, através das expressões destas grandezas obtidas pela transformação em componentes simétricas. O mesmo pode ser feito com os valores das indutâncias que são, também, parâmetros variáveis no tempo.

Do procedimento geral, para métodos de integração numérica, como comentado no parágrafo anterior, pode-se observar que a matriz de indutância deve ser invertida a cada passo de integração. Esta operação consumirá tempo

excessivo em relação às outras operações envolvidas no cálculo das derivadas à medida em que a ordem do sistema de equações aumenta, dificultando a exequibilidade do método em PC's. O que se faz, normalmente, para resolver esse tipo de problema, é utilizar uma transformação de variáveis que estabeleça matrizes de coeficientes (para as grandezas que estão sendo integradas) que sejam constantes durante o processo de integração.

## IV.2 Matrizes de Transformação

O uso da nova transformação tem como objetivo obter-se no lugar de  $L_{sr}$ , uma matriz com elementos invariantes no tempo. Ela será definida através da multiplicação das matrizes  $T_s$  e  $Tr^{-1}$  por  $L_{sr}$ , conforme a Equação (IV.3), onde as novas matrizes,  $T_s$  e  $Tr$ , são convenientemente escolhidas para que se possa alcançar o objetivo acima mencionado. Assim escreve-se:

$$M_{sr} = T_s L_{sr} Tr^{-1}, \quad (IV.3)$$

onde:  $M_{sr}$  é uma matriz de coeficientes constantes que será obtida pela transformação em questão,

$$T_s = \text{diag} \left[ e^{-j d \phi} \quad e^{-(d+hgm)\phi} \right] e \quad (IV.4)$$

$$Tr = \text{diag} \left[ e^{j(3p-\frac{3+h}{2}gm-d)\phi} \quad e^{j(9p-\frac{3+h}{2}gm-d)\phi} \quad \dots \quad e^{j(p-d)\phi} \quad \dots \right. \\ \left. e^{-j(9p-\frac{3+h}{2}gm+d)\phi} \quad e^{-j(3p-\frac{3+h}{2}+d)\phi} \right], \quad (IV.5)$$

sendo o parâmetro  $d$  na transformação arbitrário, obtendo-se maior simplificação com  $d = -\frac{hgm}{2}$ .

A escolha das matrizes  $T_s$  e  $Tr$  é, um tanto quanto, lógica. Como os elementos da matriz  $L_{sr}$  são fasores girantes com amplitudes constantes, os elementos das matrizes  $T_s$  e  $Tr$  só poderiam ser funções do mesmo tipo. Elas são escolhidas convenientemente, para que no produto matricial  $T_s L_{sr} Tr^{-1}$  as exponenciais resultantes possuam expoentes nulos, obtendo-se, portanto, a matriz  $M_{sr}$  com todos os elementos invariantes no tempo.

As matrizes  $T_s$  e  $Tr$  são, por simplificação, escolhidas sob a forma diagonal. Desta maneira, no produto matricial  $T_s L_{sr} Tr^{-1}$ , os elementos



resultantes são encontrados por produtos de três elementos apenas, sendo um de cada uma das matrizes envolvidas.

Como pode ser observado em (III.66), elementos da primeira e da segunda linha posicionados em colunas simétricas em relação a uma linha vertical central da matriz  $L_{sr}$ , são fasores girantes conjugados entre si. Isto significa que a matriz  $M_{sr} = T L_{sr} T^{-1}$  terá os mesmos elementos na primeira e na segunda linha, só que dispostos de forma invertida. Ou seja, a segunda linha é igual a uma permutação completa da primeira.

As características das operações mencionadas acima, são mostradas a seguir:

-elemento (1,1) de  $T_s$ :  $e^{-jd\phi}$

-elemento (1,1) de  $L_{sr}$ :  $M_\nu e^{j(3p - \frac{3+h}{2}gm)\phi}$

-elemento (1,1) de  $T_r^{-1}$ :  $e^{-j(3p - \frac{3+h}{2}gm - d)\phi}$

-elemento (1,1) resultante em  $M_{sr}$ :

$$M_\nu e^{j[-d\phi + (3p - \frac{3+h}{2}gm)\phi - (3p - \frac{3+h}{2}gm - d)\phi]} = M_\nu,$$

sendo  $\nu = 3p - \frac{3+h}{2}gm$ .

-elemento (2,2) de  $T_s$ :  $e^{-j(d+hgm)\phi}$

-elemento (2,r) de  $L_{sr}$ :  $M_\nu e^{j(-3p + \frac{3+h}{2}gm)\phi}$

-elemento (r,r) de  $T_r^{-1}$ :  $e^{j(3p - \frac{3-h}{2}gm + d)\phi}$

-elemento (2,r) resultante em  $M_{sr}$ :

$$M_\nu e^{j[-(d+hgm)\phi + (-3p + \frac{3+h}{2}gm)\phi + (3p - \frac{3-h}{2}gm + d)\phi]} = M_\nu,$$

sendo  $\nu = -(3p - \frac{3+h}{2}gm)$  que é uma componente harmônica simétrica à componente do elemento (1,1) da matriz  $L_{sr}$ .

Os valores de  $M_v$  nos dois casos são iguais porque independem do sinal da componente harmônica  $v$ .

Conforme mostrado em (III.66), as harmônicas relativas aos elementos da primeira linha de  $L_{sr}$  são, pela ordem,  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{r-1}, v_r\}$  enquanto as harmônicas dos elementos da segunda linha são, também pela ordem,  $\{-v_r, -v_{r-1}, \dots, -v_3, -v_2, -v_1\}$ . Os coeficientes constantes dos elementos da matriz  $L_{sr}$  são  $\{M_{v_1}, M_{v_2}, M_{v_3}, \dots, M_{v_{r-1}}, M_{v_r}\}$ , para primeira linha, e  $\{M_{v_r}, M_{v_{r-1}}, \dots, M_{v_3}, M_{v_2}, M_{v_1}\}$ , para a segunda linha. Estes coeficientes são exatamente iguais aos elementos de  $M_{sr}$  que apresentam uma expressão para cálculo já mostrada no capítulo anterior e reapresentada a seguir:

$$M_v = \frac{\sqrt{3m} \ 4\mu_0 \ l \ R \ w \ K_{wn}}{\pi \ \delta \ v^2 \ FSM \ K_c} \text{sen} \left| \frac{v \ \pi}{m} \right| \quad (\text{IV.6})$$

#### IV.3 Interpretação Física das Transformações

Para melhor compreender os resultados da transformação de componentes simétricas e da nova transformação de coeficientes constantes proposta, deve-se procurar interpretar fisicamente os aspectos matemáticos associados aos fenômenos eletromagnéticos ocorrentes na máquina. Essa interpretação é feita através de uma *análise da máquina operando em regime permanente, com tensões senoidais equilibradas aplicadas aos enrolamentos do estator*. Nestas condições espera-se que cada conjunto de enrolamentos por fase produza um campo pulsante e que a composição destes campos pulsantes resulte em um único campo girante com velocidade  $\frac{\omega u}{p}$  (rd mecânicos/s). Nesta linha de raciocínio, a corrente de cada fase do estator em relação às demais grandezas elétricas e magnéticas deveria ser formada apenas por uma componente de frequência fundamental.

Na realidade, uma corrente senoidal de frequência fundamental, fluindo no conjunto de enrolamentos relativos a um par de pólos de uma fase do estator, produz, distribuída ao longo do passo polar, uma onda de força magnetomotriz pulsante formada por uma componente fundamental mais uma série infinita de componentes harmônicas ímpares. São as harmônicas espaciais de força magnetomotriz abordadas neste trabalho.

Para cada ordem harmônica, as contribuições de ondas de forças

magnetomotrizes pulsantes das fases produzem um campo girante que pode ter velocidade no sentido de giro da máquina (seqüência positiva) ou no sentido contrário (seqüência negativa), ou ainda, resultar em um campo nulo. Ordens harmônicas como a fundamental, a sétima, a décima terceira e outras que possam ser expressas na forma  $n=3s+1$ , geram campos de seqüência positiva, enquanto ordens harmônicas como a quinta, a décima primeira, e outras com formação  $n=3s-1$ , geram campos de seqüência negativa. Ordens múltiplas de 3, ou com formação  $n=3s+3$ , geram campos resultantes nulos.

Essas componentes harmônicas de força magnetomotriz são equivalentes a campos de freqüência fundamental produzidos por enrolamentos com maior número de pólos ( $2np$ ) que o real da máquina ( $2p$ ). Elas estão relacionadas com componentes de onda de fluxo que giram no entreferro da máquina com velocidades mais baixas que o campo girante fundamental, expressas por  $\pm \frac{\omega_u}{np}$  (rd mecânicos/s) em relação ao estator, onde o sinal mais (+) é usado para campos que giram no sentido do campo fundamental e menos (-) para campos que giram em sentido contrário. Em relação ao rotor estas velocidades são expressas por  $\pm \frac{\omega_u}{np} - \omega$  (rd mecânicos/s). Cada componente de fluxo, por sua vez, enlaça enrolamentos do rotor, produzindo forças eletromotrizes com freqüência  $\pm \omega_u - np\omega$  (rd/s) e conseqüentemente, cada uma destas componentes de tensão induzida fará fluir, em cada barra (ou em cada enrolamento), uma componente de corrente com esta mesma freqüência  $\pm \omega_u - np\omega$  (rd elétricos/s).

São de escorregamento todas as freqüências das componentes de corrente nos enrolamentos do rotor. São escorregamentos entre componentes harmônicas de força magnetomotriz (campos girantes, de seqüências positivas e de seqüências negativas) e a velocidade do rotor.

Para cada componente harmônica de força magnetomotriz de ordem  $n$  produzida pelo estator, o ângulo elétrico total de uma volta sobre o entreferro da máquina será igual a  $np(2\pi)$  (rd elétricos), ficando a defasagem entre as correntes de duas barras vizinhas do rotor igual a  $\frac{np(2\pi)}{m}$  (rd elétricos). Cada conjunto de componentes de correntes de uma determinada freqüência, generalizada por  $\pm \omega_u - np\omega$  (rd/s), constitui um sistema polifásico de correntes, com número de fases igual a  $m/p$  e número de pólos igual a  $2np$ . Além disso, elas percorrem enrolamentos próximos da superfície do rotor e deslocados no espaço por um ângulo exatamente igual à defasagem angular entre suas correntes,  $\frac{np(2\pi)}{m}$  (radianos elétricos), caracterizando as condições de formação de campo girante. São os chamados campos de reação do rotor, cujas velocidades dependem das freqüências das componentes de corrente e do número de pólos formado por cada sistema polifásico estabelecido nos enrolamentos do rotor.

Para análise dos campos de reação do rotor, cada ângulo de fase deve ser representado através de sua menor determinação. Na defasagem entre duas barras vizinhas, esta menor determinação é dada pelo resto inteiro da divisão do ângulo  $\frac{np(2\pi)}{m}$  por  $2\pi$ , ambos em radianos elétricos. Para as primeiras harmônicas, as distribuições apresentarão diferenças, passando a ocorrer repetições ou mesmo distribuições de ângulos simétricos para harmônicas de ordens superiores (Tabela IV.1). Por estes fatos, estas harmônicas ficam classificadas em grupos de frequências que geram campos de mesma seqüência ou de seqüências simétricas, dentre os  $m$  grupos de seqüências possíveis de ser estabelecidos nos  $m$  enrolamentos do rotor. Estes conjuntos de componentes de correntes devem ter valores proporcionais entre si e, os campos girantes estabelecidos por eles possuem efeitos de número de pólos relativos a menor das frequências do grupo. Ou seja:

Uma harmônica de força magnetomotriz do estator de ordem  $n$  pertencente a um destes grupos gira, em relação ao estator, com velocidade  $\pm \frac{\omega_u}{np}$  (rd mecânicos/s) e, em relação ao rotor, com velocidade  $\pm \frac{\omega_u}{np} \mp \omega$  (rd mecânicos/s). Ela produz componentes de correntes nas barras com frequência  $\pm \omega_u - np\omega$  (rd/s) que, por sua vez, produzem um campo de reação do rotor com número de pólos igual a  $2pn'$ , onde  $n'$  é a menor ordem harmônica do referido grupo. Este campo girante de reação gira, em relação ao rotor, com velocidade  $\pm \frac{\omega_u - np\omega}{n'p}$  (rd mecânicos/s) e, em relação ao estator, com velocidade  $\pm \frac{\omega_u - np\omega}{n'p} + \omega = \pm \frac{\omega_u}{n'p} + \frac{(n' - n)\omega}{n'}$  (rd mecânicos/s), induzindo tensões nos enrolamentos do estator e conseqüentemente formando correntes com frequência diferente da fundamental, igual a  $\pm \omega_u + (n' - n)p\omega$  (rd/s). Caso a distribuição de ângulos de defasagens das correntes do rotor, produzida pela harmônica  $n$  do estator, seja simétrica à distribuição de ângulos da harmônica  $n'$ , o campo girante de reação produzido por correntes de frequência  $\pm \omega_u - np\omega$  (rd/s) girará em sentido contrário ao campo de reação produzido por correntes de frequência  $\pm \omega_u - n'p\omega$  (rd/s). Nesse caso, o campo de reação referente à harmônica  $n$  girará, em relação ao estator, com velocidade  $\mp \frac{\omega_u}{n'p} + \frac{(n' + n)\omega}{n'}$  (rd mecânicos/s), produzindo tensões e correntes com frequência  $\pm \omega_u + (n' + n)p\omega$  (rd/s).

Tabela IV.1

Distribuição de ângulos de fase das componentes de corrente nas barras do rotor para uma máquina com 28 barras.

barra	n=1	n=5	n=7	n=11	n=13	n= 19	n=25
1	$0 \equiv 2\pi$	$0 \equiv 2\pi$	$0 \equiv 2\pi$	$0 \equiv 2\pi$	$0 \equiv 2\pi$	$0 \equiv 2\pi$	$0 \equiv 2\pi$
2	$\pi/7$	$5\pi/7$	$\pi$	$11\pi/7$	$13\pi/7 \equiv -\pi/7$	$19\pi/7 \equiv 5\pi/7$	$25\pi/7 \equiv 11\pi/7$
3	$2\pi/7$	$10\pi/7$	$2\pi$	$22\pi/7$	$26\pi/7 \equiv -2\pi/7$	$38\pi/7 \equiv 10\pi/7$	$50\pi/7 \equiv 22\pi/7$
4	$3\pi/7$	$15\pi/7$	$3\pi$	$33\pi/7$	$39\pi/7 \equiv -3\pi/7$	$57\pi/7 \equiv 15\pi/7$	$75\pi/7 \equiv 33\pi/7$
5	$4\pi/7$	$20\pi/7$	$4\pi$	$44\pi/7$	$52\pi/7 \equiv -4\pi/7$	$76\pi/7 \equiv 20\pi/7$	$100\pi/7 \equiv 44\pi/7$
6	$5\pi/7$	$25\pi/7$	$5\pi$	$55\pi/7$	$65\pi/7 \equiv -5\pi/7$	$95\pi/7 \equiv 25\pi/7$	$125\pi/7 \equiv 55\pi/7$
7	$6\pi/7$	$30\pi/7$	$6\pi$	$66\pi/7$	$78\pi/7 \equiv -6\pi/7$	$114\pi/7 \equiv 30\pi/7$	$150\pi/7 \equiv 66\pi/7$
8	$\pi$	$5\pi$	$\pi$	$11\pi$	$13\pi \equiv -\pi$	$19\pi \equiv 5\pi$	$25\pi \equiv 11\pi$
9	$8\pi/7$	$40\pi/7$	$8\pi$	$88\pi/7$	$-8\pi/7$	$152\pi/7 \equiv 40\pi/7$	$200\pi/7 \equiv 88\pi/7$
10	$9\pi/7$	$45\pi/7$	$9\pi$	$99\pi/7$	$-9\pi/7$	$171\pi/7 \equiv 45\pi/7$	$225\pi/7 \equiv 99\pi/7$
11	$10\pi/7$	$50\pi/7$	$10\pi$	$110\pi/7$	$-10\pi/7$	$190\pi/7 \equiv 50\pi/7$	$250\pi/7 \equiv 110\pi/7$
12	$11\pi/7$	$55\pi/7$	$11\pi$	$121\pi/7$	$-11\pi/7$	$209\pi/7 \equiv 55\pi/7$	$275\pi/7 \equiv 121\pi/7$
13	$12\pi/7$	$60\pi/7$	$12\pi$	$132\pi/7$	$-12\pi/7$	$228\pi/7 \equiv 60\pi/7$	$300\pi/7 \equiv 132\pi/7$
14	$13\pi/7$	$65\pi/7$	$13\pi$	$143\pi/7$	$-13\pi/7$	$247\pi/7 \equiv 65\pi/7$	$325\pi/7 \equiv 143\pi/7$
15	$2\pi$	$10\pi$	$14\pi$	$154 \equiv 22\pi$	$26\pi \equiv -2\pi$	$38\pi \equiv 10\pi$	$50\pi \equiv 22\pi$

Para duas componentes harmônicas de força magnetomotriz do estator  $n$  e  $n'$  que produzam distribuição equivalentes ou simétricas de ângulos de fases, as defasagens entre os ângulos das correntes de dois enrolamentos vizinhos, expressas pelas suas menores determinações, são relacionadas por:

$$\gamma = \text{menor determinação de } \frac{np(2\pi)}{m} = \pm \text{menor determinação de } \frac{n'p(2\pi)}{m}.$$

O sinal negativo (-) é devido a distribuições de ângulos de defasagens proporcionais com sinais contrários (seqüências simétricas) e o positivo quando forem de mesma seqüência. Desta forma,  $\frac{np(2\pi)}{m} = g2\pi \pm \frac{n'p(2\pi)}{m}$ , para algum  $g$  inteiro.

Dividindo-se por  $2\pi$  e multiplicando-se por  $m$ , toda a equação, tem-se:

$$np = gm \pm n'p, \text{ ou } n \mp n' = gm/p,$$

onde o sinal menos é usado agora para iguais distribuição de ângulos.

Tomando-se o menor inteiro  $g$  que satisfaz a relação  $n \mp n' = gm/p$ , necessariamente, se tomará o valor de  $g$  que satisfaz a relação  $gm = 2rp$ , onde  $r$  é o número de colunas da matriz  $L_{sr}$ . Assim,  $n \mp n'$  é igual a um inteiro múltiplo de  $2r$  e as frequências das componentes de correntes do estator, induzidas pelos campos de reação do rotor são calculadas, em rd/s, pelas seguintes expressões:

$$\pm \omega_r + k2r p \omega \quad \text{ou} \quad \pm \omega_r + g m \omega$$

Na modelagem apresentada para a máquina trifásica, neste trabalho, o espectro de harmônicas fica restrito à representação de  $r$  ordens harmônicas, limitando em duas componentes a representação das correntes do estator, a fundamental e a componente de frequência  $\pm \omega_r + 2r p \omega$  (rd/s).

Exemplo IV.1: Para a máquina com 28 barras e 4 pólos, já estudada em exemplos anteriores, o número  $r$  é igual a 7 e, as ordens harmônicas de força magnetomotriz consideradas foram: 1, 5, 7, 11, 13, 19 e 25.

A distribuição de ângulos de fase das componentes de correntes das barras do rotor foi apresentada na Tabela IV.1, para a metade do número de pólos formados para cada harmônica de campo girante do estator. Para a componente fundamental, a metade dos pólos será igual a 2, ficando compreendidos entre as barras 1 e 15. Para as demais harmônicas, a metade do número de pólos será igual a  $2n$  e ficarão compreendidos entre as mesmas barras, de 1 a 15.

A relação  $n \mp n' = 2r$  para componentes harmônicas de campos girantes equivalentes é satisfeita para:

Harmônicas  $n=1$  e  $n'=13$ , que geram distribuições de ângulos de fases simétricas ou frequências de seqüências simétricas em relação ao sistema polifásico do rotor, valendo a soma entre  $n$  e  $n'$ . Ou seja,  $n+n'=1+13=14$ .

Harmônicas  $n'=5$  e  $n=19$ , que geram distribuições de ângulos de fases iguais ou frequências de mesma seqüência, valendo a subtração entre  $n$  e  $n'$ . Ou seja,  $n-n'=19-5=14$ .

Harmônicas  $n'=11$  e  $n=25$ , que geram distribuições de ângulos de fases iguais ou frequências de mesma seqüência, valendo a subtração entre  $n$  e  $n'$ . Ou seja,  $n-n'=25-11=14$ .

Harmônica  $n=7$ , que gera uma distribuição de ângulos de fases de seqüência zero (ou anti-zero), podendo ser enquadrada como duas seqüências

simétricas, valendo a soma entre  $n$  e  $n'$ . Ou seja,  $n+n'=7+7=14$ .

Em todos os casos  $n+n'$  é igual a 14 ou igual a  $2r$  e a frequência induzida no estator pelos campos de reação do rotor será igual a  $\pm\omega_r+(n'+n)p\omega$ , ou  $\pm\omega_r+g\mu\omega$ , ou para o exemplo considerado,  $\pm\omega_r+28\omega$ .

Com a transformação em variáveis de componentes simétricas, as tensões do estator passam a ser representadas por fasores girantes de seqüência positiva e seqüência negativa, que são as componentes simétricas das tensões. O mesmo efeito será alcançado aplicando-se esta transformação em correntes senoidais fluindo nos enrolamentos das fases do estator. Interessante é determinar que forma de relação essas componentes de seqüência positiva e negativa, de tensões ou de correntes, pode ter com as ondas de fluxo ou de força magnetomotriz girante no entreferro da máquina.

Considerando-se a linearidade, pode-se pensar nos fluxos ou forças magnetomotrizes girantes como composições de fluxos pulsantes formados por tensões e correntes aplicadas a cada enrolamento de fase. Além disso, as tensões e correntes que são em geral expressas por funções senoidais variantes no tempo é que fazem os fluxos ou forças magnetomotrizes pulsarem na direção dos eixos dos enrolamentos da máquina. Cada campo pulsante pode ser considerado uma soma de dois campos girantes de mesma amplitude e velocidades de sentidos contrários, ficando a resultante da composição destes fluxos formada, efetivamente, apenas pelas componentes dos campos pulsantes que giram no sentido desta resultante. Ou seja, as componentes de seqüência positiva das tensões ou correntes relacionam-se direta e exclusivamente com as componentes de seqüência positiva dos campos pulsantes que são as únicas responsáveis pela formação do campo girante resultante. Esta análise torna transparente o papel da transformação de componentes simétricas. Ela estabelece um sistema de variáveis que representa, separadamente, parcelas formadoras e não formadoras de campo girante nas novas correntes e tensões estabelecidas.

Para que estes e outros aspectos importantes possam ser observados no restante da análise, um exemplo é desenvolvido a seguir.

Exemplo IV.2: Máquina com número de barras  $m=28$  e número de par de pólos  $p=2$

Número de colunas da matriz  $M_{sr}$ :  $r = \frac{g}{2} \frac{28}{x} \frac{2}{2} = 7$ , para  $g=1$ .

Tensões no sistema de componentes simétricas:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_{s1} \\ v_{s2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \times \sqrt{2}V \begin{bmatrix} \cos \omega_{ut} \\ \cos (\omega_{ut}-2\pi/3) \\ \cos (\omega_{ut}-4\pi/3) \end{bmatrix} = \sqrt{3/2}V \begin{bmatrix} 0 \\ e^{j\omega_{ut}} \\ e^{-j\omega_{ut}} \end{bmatrix}$$

As tensões do rotor são todas nulas.

As harmônicas da matriz de mútuas, distribuídas nas suas colunas não nulas, podem ser obtidas pela expressão geral apresentada em (III.66):

$$\begin{array}{rcccl} \text{colunas} & 6 & 18 & 2 & 14 & 26 & 10 & 22 \\ \text{seq. +} & \begin{bmatrix} -11 & -5 & 1 & 7 & 13 & 19 & 25 \end{bmatrix} \\ \text{seq. -} & \begin{bmatrix} -25 & -19 & -13 & -7 & -1 & 5 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

A matriz  $L_{sr}$  ficará representada na forma abaixo:

$$L_{sr} = \begin{bmatrix} m_{-22} & m_{-10} & m_2 & m_{14} & m_{26} & m_{38} & m_{50} \\ m_{-50} & m_{-38} & m_{-26} & m_{-14} & m_{-2} & m_{10} & m_{22} \end{bmatrix},$$

onde  $m_v = Mve^{jv\phi}$ ,  $m_{-v} = m_v^*$  e  $M_{-v} = M_v$ , como mostrado na expressão (IV.6).

As demais matrizes do sistema de equações são:

$$R_{ss} = \text{diag}[R_s \ R_s],$$

$$R_{rr} = \text{diag}[R_{r6}, R_{r18}, R_{r2}, R_{r14}, R_{r26}, R_{r10}, R_{r22}],$$

$$\text{onde: } R_{r1} = 2r_a + C_1 r_b \quad \text{e} \quad C_1 = 4\text{sen}^2 \pi/m$$

$$L_{ss} = \text{diag}[L_{s1} \ L_{s2}] \quad \text{e}$$

$$L_{rr} = \text{diag}[L_{r6}, L_{r18}, L_{r2}, L_{r14}, L_{r26}, L_{r10}, L_{r22}],$$

$$\text{onde: } L_{s1} = L_{s2} = l_{sd} + L_{s1} + L_{s5} + L_{s7} + L_{s11} + L_{s13} + L_{s19} + L_{s25} \quad \text{e}$$

$$L_{r1} = 2l_a + C_1 l_b + \frac{2 \mu_0 \pi R l}{m \delta}$$

Sistema de equações:

$$\sqrt{3/2}Ve^{j\omega_{ut}} = R_{s1}s_1 + \rho L_{s1}s_1 +$$



$$+\frac{d}{dt}\left\{m_{-22}i_{r8} + m_{-10}i_{r18} + m_2i_{r2} + m_{14}i_{r14} + m_{26}i_{r26} + m_{38}i_{r10} + m_{50}i_{r22}\right\}$$

$$\sqrt{3/2}V_e^{-j\omega t} = R s i_{s2} + \rho L s 2 i_{s2} +$$

$$+\frac{d}{dt}\left\{m_{-50}i_{r8} + m_{-38}i_{r18} + m_{-26}i_{r2} + m_{-14}i_{r14} + m_{-2}i_{r26} + m_{10}i_{r10} + m_{22}i_{r2}\right\}$$

$$0 = R r 8 i_{r8} + \frac{d}{dt}\left\{L r 8 i_{r8} + m_{22}i_{s1} + m_{50}i_{s2}\right\}$$

$$0 = R r 18 i_{r18} + \frac{d}{dt}\left\{L r 18 i_{r18} + m_{10}i_{s1} + m_{38}i_{s2}\right\}$$

$$0 = R r 2 i_{r2} + \frac{d}{dt}\left\{L r 2 i_{r2} + m_{-2}i_{s1} + m_{26}i_{s2}\right\}$$

$$0 = R r 14 i_{r14} + \frac{d}{dt}\left\{L r 14 i_{r14} + m_{-14}i_{s1} + m_{14}i_{s2}\right\}$$

$$0 = R r 26 i_{r26} + \frac{d}{dt}\left\{L r 26 i_{r26} + m_{-26}i_{s1} + m_2i_{s2}\right\}$$

$$0 = R r 10 i_{r10} + \frac{d}{dt}\left\{L r 10 i_{r10} + m_{-38}i_{s1} + m_{-10}i_{s2}\right\}$$

$$0 = R r 22 i_{r22} + \frac{d}{dt}\left\{L r 22 i_{r22} + m_{-50}i_{s1} + m_{-22}i_{s2}\right\}$$

Como as funções forçantes do sistema e alguns coeficientes das equações ou são constantes ou são fasores girantes, as correntes também serão fasores girantes. A diferença em relação às tensões, que será mostrada mais adiante, é que cada corrente será formada por dois fasores girantes componentes com frequências diferentes.

Utilizando-se a propriedade da superposição, pode-se aplicar uma função forçante por vez, estabelecendo-se dois sistemas de equações independentes. A expressão final de cada corrente é formada pela composição das correspondentes

expressões das correntes encontradas na solução de cada sistema. Levando-se em conta que  $R_{rk}=R_{r\bar{m}-k}$ ,  $L_{rk}=L_{r\bar{m}-k}$ ,  $L_{s1}=L_{s2}$  e  $m_{-v}^*=m_v^*$ , verifica-se que os dois sistemas estabelecidos pela aplicação de cada função forçante apresentam uma relação de conjugados entre suas equações, facilmente verificado por rápida análise visual, que leva a seguinte conclusão:

$$i_{s1}=i_{s2}^*, i_{r6}=i_{r22}^*, i_{r18}=i_{r10}^*, i_{r2}=i_{r28}^* \text{ e } i_{r14}=i_{r14}^* \text{ (real)}$$

Como as tensões do estator são fasores girantes conjugados entre si, com frequências síncronas de sequência positiva e de sequência negativa, poder-se-ia pensar que as correntes do estator tivessem esta mesma forma, com os mesmos tipos de funções. Esta proposta pode ser verificada no sistema de equações, de acordo com a seguinte análise:

Considere  $i_{s1}=K_1 e^{j\omega_s t}$  e  $i_{s2}=K_2 e^{-j\omega_s t}$ , onde os fasores  $K_1$  e  $K_2$  são conjugados entre si.

Substituindo-se estas correntes nas equações do rotor, determina-se a seguinte solução:

$$i_{r6}=H_6 e^{j(\omega_u+22\omega)t} + G_6 e^{j(-\omega_u+50\omega)t} \text{ e } i_{r22}=H_{22} e^{j(\omega_u-50\omega)t} + G_{22} e^{j(-\omega_u-22\omega)t},$$

$$i_{r18}=H_{18} e^{j(\omega_u+10\omega)t} + G_{18} e^{j(-\omega_u+38\omega)t} \text{ e } i_{r10}=H_{10} e^{j(\omega_u-38\omega)t} + G_{10} e^{j(-\omega_u-10\omega)t},$$

$$i_{r2}=H_2 e^{j(\omega_u-2\omega)t} + G_2 e^{j(-\omega_u+26\omega)t} \text{ e } i_{r28}=H_{28} e^{j(\omega_u-26\omega)t} + G_{28} e^{j(-\omega_u+2\omega)t},$$

$$i_{r14}=H_{14} e^{j(\omega_u-14\omega)t} + G_{14} e^{j(-\omega_u+14\omega)t} = I_{14} \cos[(\omega_u-14\omega)t + \alpha_{14}]$$

Para que sejam verdadeiras as relações  $i_{r6}=i_{r22}^*$ ,  $i_{r18}=i_{r10}^*$ ,  $i_{r2}=i_{r28}^*$  e  $i_{r14}=i_{r14}^*$  (real) é claro que  $H_6=G_{22}^*$ ,  $G_6=H_{22}^*$ ,  $H_{18}=G_{10}^*$ ,  $G_{18}=H_{10}^*$ ,  $H_2=G_{28}^*$ ,  $G_2=H_{28}^*$  e  $H_{14}=G_{14}$  (real).

Nesta etapa, faz-se uma análise de forma, onde o interesse está em obter-se relações entre as correntes de componentes simétricas e possíveis relações entre as componentes de frequências distintas destas correntes.

A solução encontrada mostra que todas as correntes do rotor possuem duas componentes de frequências diferentes, exceto no caso de  $i_{r14}$  que é real. Quando essas correntes são substituídas na primeira equação do sistema, fica formado um somatório com fasores girantes de frequência  $\omega_u$  e com fasores girantes de frequência  $-\omega_u+28\omega$ , mostrando que a corrente  $i_{s1}$  não pode ter a forma proposta inicialmente, com um fasor girante de uma frequência  $\omega_u$  apenas.

Analogamente, a mesma situação pode ser verificada para a outra corrente do estator  $i_{s2}$ . Desta forma, a proposta mais viável de solução para a corrente  $i_{s1}$  é a soma de dois fasores girantes, justamente, com as frequências  $\omega_u$  e  $-\omega_u + 28\omega$ , ficando a corrente  $i_{s2}$  igual ao conjugado de  $i_{s1}$ , como nas expressões abaixo:

$$i_{s1} = K_1 e^{j\omega_u t} + K_3 e^{j(-\omega_u + 28\omega)t} \quad \text{e} \quad i_{s2} = K_2 e^{-j\omega_u t} + K_4 e^{j(\omega_u - 28\omega)t},$$

onde  $K_1 = K_2^*$  e  $K_3 = K_4^*$ .

Substituindo-se estas correntes do estator no sistema de equações, determina-se diretamente, pelo uso das sete últimas equações (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), as correntes do rotor, obtendo-se as mesmas formas encontradas na primeira tentativa. Isto confirma que a nova proposta representa realmente a solução para as correntes do estator. As componentes de frequências  $-\omega_u + 28\omega$  e  $\omega_u - 28\omega$  estão de acordo com a análise feita no sistema de variáveis originais.

Como anunciado anteriormente, todas as correntes são compostas por dois fasores girantes de diferentes frequências. Cada um desses fasores girantes representa a contribuição ao campo girante estabelecido por um sistema polifásico de componentes de correntes de uma determinada frequência. Para o sistema trifásico do estator, o cálculo da força magnetomotriz girante pode ser expresso por  $\sqrt{3}N_1 i_{s1}$ , enquanto no rotor, a força magnetomotriz de cada grupo de seqüência de fase é expressa por  $\sqrt{m}i_{rv}$ , onde  $N_1$  é o número de espiras do conjunto de enrolamentos de cada fase do estator e  $v = np$  é o mesmo parâmetro já definido anteriormente. Os dois fasores girantes que ficam somados em uma mesma variável do sistema de componentes simétricas representam frequências do rotor do mesmo grupo de seqüência. São aquelas frequências com mesma distribuição de ângulos de fase (ou distribuições simétricas) nos enrolamentos do rotor. A conclusão final é que cada variável de corrente em componentes simétricas conterà a informação de duas, ao invés de uma, componentes de campo girante no entreferro, tanto para o estator como para o rotor.

No sistema de variáveis em componentes simétricas, cada corrente do estator pertence a um grupo de seqüência do sistema trifásico do estator, seqüência positiva ou negativa e cada corrente do rotor pertence a um grupo de seqüência relativo ao sistema m-fásico do rotor. Cada corrente é a soma de dois fasores girantes relacionados a dois campos girantes que guardam entre si uma velocidade relativa de  $-2\omega_u + 28\omega$ , igual para todas as correntes.

No sistema de variáveis a coeficientes constantes, estabelecido pela nova

transformação, as correntes serão calculadas em relação a um sistema de eixos de referências móveis (Figura IV.1), resultando em parâmetros de relacionamento entre tensões e correntes, invariantes no tempo. Do ponto de vista das novas referências e com  $d=-ghm/2$ , todas as variáveis, correntes e tensões, serão compostas por dois fasores girantes conjugados entre si, com as mesmas frequências para todas estas variáveis. Neste novo sistema de variáveis, cada componente de sequência do sistema de componentes simétricas será referenciada a um eixo móvel, cuja velocidade angular é igual à média entre as frequências angulares dos fasores girantes componentes, medidas em relação ao sistema de variáveis de componentes simétricas. Esta análise pode ser feita sobre todas as características da máquina utilizada nos exemplos mostrados anteriormente:

Calcula-se as matrizes de transformação para o caso, utilizando-se as expressões mostradas em (IV.4) e (IV.5):

$$T_s = \text{diag} \begin{bmatrix} e^{-j14\phi} & e^{j14\phi} \end{bmatrix} e$$

$$T_r = \text{diag} \begin{bmatrix} e^{-j36\phi} & e^{-j24\phi} & e^{-j12\phi} & 1 & e^{j12\phi} & e^{j24\phi} & e^{j36\phi} \end{bmatrix}.$$

Estas matrizes são aplicadas às correntes em componentes simétricas, obtendo-se as correntes no novo sistema:

$$i_{s1} = k_1 e^{j(\omega u - 14\omega)t} + k_3 e^{j(-\omega u + 14\omega)t},$$

$$i_{s2} = k_2 e^{j(-\omega u + 14\omega)t} + k_4 e^{j(\omega u - 14\omega)t},$$

$$i_{r6} = h_6 e^{j(\omega u - 14\omega)t} + g_6 e^{j(-\omega u + 14\omega)t},$$

$$i_{r18} = h_{18} e^{j(\omega u - 14\omega)t} + g_{18} e^{j(-\omega u + 14\omega)t},$$

$$i_{r2} = h_2 e^{j(\omega u - 14\omega)t} + g_2 e^{j(-\omega u + 14\omega)t},$$

$$i_{r14} = I_{14} \cos[(\omega u - 14\omega)t + \alpha_{14}],$$

$$i_{r26} = h_{26} e^{j(\omega u - 14\omega)t} + g_{26} e^{j(-\omega u + 14\omega)t},$$

$$i_{r10} = h_{10} e^{j(\omega u - 14\omega)t} + g_{10} e^{j(-\omega u + 14\omega)t},$$

$$i_{r22} = h_{22} e^{j(\omega u - 14\omega)t} + g_{22} e^{j(-\omega u + 14\omega)t}.$$

Todas as correntes são combinações de dois fasores girantes conjugados entre si, com velocidades  $+(\omega u - 14\omega)$  e  $-(\omega u - 14\omega)$  em (rd elé/s), em relação aos seus novos eixos de referências. São campos de sequência positiva e de sequência negativa em relação aos novos eixos de referência.

As velocidades dos eixos de referências das correntes no sistema de coeficientes constantes são relacionadas abaixo:

corrente $i_{s1}$	-	velocidade	$14\omega$	corrente $i_{s2}$	-	velocidade	$-14\omega$
corrente $i_{r6}$	-	velocidade	$36\omega$	corrente $i_{r18}$	-	velocidade	$24\omega$
corrente $i_{r2}$	-	velocidade	$12\omega$	corrente $i_{r14}$	-	velocidade	zero
corrente $i_{r28}$	-	velocidade	$-12\omega$	corrente $i_{r10}$	-	velocidade	$-24\omega$
corrente $i_{r22}$	-	velocidade	$-36\omega$				

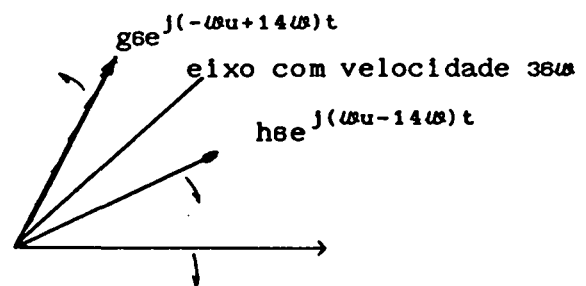
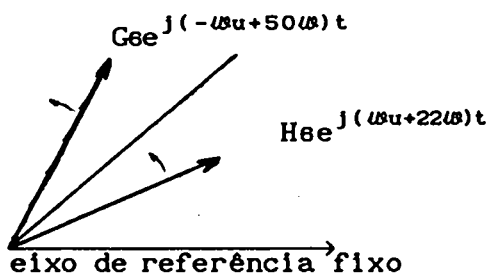


Figura IV.1 - Interpretação física da transformação para sistema de coeficientes constantes.

#### IV.4 Aplicação da Transformação ao Sistema de Equações

Uma vez apresentado os objetivos da nova transformação, as matrizes utilizadas e a interpretação física da mesma, é necessário mostrar a seguir, o efeito da transformação sobre todo o sistema de equações.

Estabelecendo-se como matriz de transformação de variáveis a matriz  $\begin{bmatrix} T_s & \\ & T_r \end{bmatrix}$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_s \\ \hat{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_s & \\ & T_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \hat{i}_s \\ \hat{i}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_s & \\ & T_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.7})$$

onde  $\begin{bmatrix} \hat{u}_s \\ \hat{u}_r \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} \hat{i}_s \\ \hat{i}_r \end{bmatrix}$  são, respectivamente, os vetores de tensões e correntes no novo sistema de coeficientes constantes e  $\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$ , os correspondentes vetores no sistema de componentes simétricas.

Multiplicando-se a matriz de transformação  $\begin{bmatrix} T_s & \\ & T_r \end{bmatrix}$  à esquerda de cada lado da Equação (IV.1), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_s \\ \hat{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_s & \\ & T_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_s & \\ & T_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{ss} & 0 \\ 0 & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_s & \\ & T_r \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

Substituindo-se, na mesma equação, o vetor  $\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$  por  $\begin{bmatrix} T_s^{-1} & \\ & T_r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_s \\ \hat{i}_r \end{bmatrix}$ , encontra-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_s \\ \hat{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_s & \\ & T_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{ss} & \\ & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_s^{-1} & \\ & T_r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_s \\ \hat{i}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_s & \\ & T_r \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_s^{-1} & \\ & T_r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_s \\ \hat{i}_r \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

Como a matriz de resistências é uma matriz diagonal com parâmetros constantes, ela não será modificada após as multiplicações. Com esse resultado e efetuando-se a multiplicação entre a matriz de indutâncias e a inversa da matriz de transformação, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_s \\ \hat{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss} & \\ & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_s \\ \hat{i}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_s & \\ & T_r \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{ss} T_s^{-1} & L_{sr} T_r^{-1} \\ L_{rs} T_s^{-1} & L_{rr} T_r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_s \\ \hat{i}_r \end{bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

Aplicando-se a regra da cadeia para derivadas, vem:

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_s \\ \dot{Q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss} & \\ & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_s & \\ & T_r \end{bmatrix} \left\{ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{ss} T_s^{-1} & L_{sr} T_r^{-1} \\ L_{rs} T_s^{-1} & L_{rr} T_r^{-1} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{ss} T_s^{-1} & L_{sr} T_r^{-1} \\ L_{rs} T_s^{-1} & L_{rr} T_r^{-1} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \quad (IV.11)$$

Substituindo-se  $L_{sr} T_r^{-1}$  por  $T_s^{-1} M_{sr}$ ,  $L_{rs} T_s^{-1}$  por  $T_r^{-1} M_{sr}^t$  e distribuindo a multiplicação da matriz de transformação sobre as parcelas da soma, no interior das chaves, escreve-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_s \\ \dot{Q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss} & \\ & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_s & \\ & T_r \end{bmatrix} \left( \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{ss} T_s^{-1} & T_s^{-1} M_{sr} \\ T_r^{-1} M_{sr}^t & L_{rr} T_r^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_s L_{ss} T_s^{-1} & T_s L_{sr} T_r^{-1} \\ T_r L_{rs} T_s^{-1} & T_r L_{rr} T_r^{-1} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \quad (IV.12)$$

Considerando-se que as matrizes  $L_{ss}$ ,  $L_{rr}$ ,  $M_{sr}$  e  $M_{sr}^t$ , na segunda parcela do lado direito da Equação (IV.12), só possuem elementos invariantes no tempo, determina-se as derivadas de  $T_s$  e  $T_r$ , substituindo-se seus resultados na Equação (IV.12).

Na terceira parcela,  $L_{ss}$  e  $L_{rr}$  são diagonais e por isso, aplica-se a comutatividade, obtendo-se como resultado as próprias matrizes  $L_{ss}$  e  $L_{rr}$ . Os demais resultados dos outros produtos matriciais desta parcela são encontrados e substituídos, obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_s \\ \dot{Q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss} & \\ & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_s & \\ & T_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ss} (-j\omega E T_s^{-1}) \\ (-j\omega E T_r^{-1}) M_{sr}^t & L_{rr} (-j\omega E T_r^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{ss} M_{sr} & \\ M_{sr}^t L_{rr} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \quad (IV.13)$$

Como na segunda parcela do lado direito, as matrizes envolvidas por multiplicações de  $T_s$  ou  $T_r$  e suas inversas são todas da forma diagonal, a comutatividade pode ser novamente aplicada. Opera-se primeiro, os produtos das matrizes  $T_s$  e  $T_r$  pelas suas inversas que resultam na matriz identidade, ficando o sistema de equações representado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_s \\ \dot{Q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss} & \\ & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} - j\omega \begin{bmatrix} E_s & \\ & E_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ss} M_{sr} \\ M_{sr}^t L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{ss} M_{sr} & \\ M_{sr}^t L_{rr} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \quad (IV.14)$$

Justificativa das substituições empregadas:

De (IV.11) para (IV.12)

$$M_{sr} = T S L_{sr} T r^{-1} \Rightarrow T S^{-1} M_{sr} = L_{sr} T r^{-1} \quad (IV.15)$$

$$M_{sr}^{t*} = (T S L_{sr} T r^{-1})^{t*} = (T r^{-1} L_{sr}^t T S)^* = T r L_{sr}^{t*} T S^{-1} \quad (IV.16)$$

Como os elementos de  $M_{sr}$  ou  $M_{sr}^t$  são números reais, seus conjugados são os próprios elementos,  $M_{sr}^* = M_{sr}$  e  $M_{sr}^{t*} = M_{sr}^t$ , ficando a Equação (IV.16) escrita da seguinte forma:

$$M_{sr}^{t*} = M_{sr}^t = T r L_{sr}^{t*} T S^{-1} \quad e \quad (IV.17)$$

$$T r^{-1} M_{sr}^t = L_{sr}^{t*} T S^{-1} = L_{rs} T S^{-1} \quad (IV.18)$$

De (IV.12) para (IV.13)

$$\frac{d}{dt}(L_{ss} T S^{-1}) = L_{ss} \frac{dT S^{-1}}{dt}, \text{ porque os elementos de } L_{ss} \text{ são invariantes no tempo e}$$

$$\frac{dT S^{-1}}{dt} = \text{diag}[j d \omega e^{j d \phi} \quad j(d+hgm) \omega e^{j(d+hgm)\phi}] \quad (IV.19)$$

$$\text{Definindo-se } E_s = \text{diag}[-d \quad -(d+hgm)], \quad (IV.20)$$

$$\text{tem-se: } \frac{dT S^{-1}}{dt} = -j \omega E_s T S^{-1} \quad (IV.21)$$

$$\frac{d}{dt}(L_{rr} T r^{-1}) = L_{rr} \frac{dT r^{-1}}{dt}, \text{ porque os elementos de } L_{rr} \text{ são invariantes no tempo e}$$

$$\frac{dT r^{-1}}{dt} = \text{diag}\left[-j \nu_1 \omega e^{-j \nu_1 \phi} \quad -j \nu_2 \omega e^{-j \nu_2 \phi} \quad \dots \quad -j \nu_k \omega e^{-j \nu_k \phi} \quad \dots \quad -j \nu_r \omega e^{-j \nu_r \phi}\right], \quad (IV.22)$$

onde:

$$\nu_k \in \left\{ (3p - \frac{3+h}{2} gm - d), (9p - \frac{3+h}{2} gm - d), \dots, (p-d), \dots, -(9p - \frac{3-h}{2} gm + d), -(3p - \frac{3-h}{2} gm + d) \right\}$$



Definindo-se

$$E_r = \text{diag} \left[ \left( 3p - \frac{3+h}{2} g_m - d \right) \left( 9p - \frac{3+h}{2} g_m - d \right) \dots (p-d) \dots - \left( 9p - \frac{3-h}{2} g_m + d \right) - \left( 3p - \frac{3-h}{2} g_m + d \right) \right], \quad (\text{IV.23})$$

$$\text{tem-se: } \frac{d}{dt} T_r^{-1} = -j\omega E_r T_r^{-1} \quad (\text{IV.24})$$

A multiplicação  $T_s L_{sr} T_r^{-1}$  é igual a  $M_{sr}$  pela própria definição da transformação e

$$\begin{aligned} T_r L_{rs} T_s^{-1} &= T_r L_{sr}^t T_s^{-1} = T_r^{-1*} L_{sr}^t T_s^* = (T_r^{-1} L_{sr}^t T_s)^* \\ &= (T_r^{-1} L_{sr}^t T_s^t)^* = (T_s L_{sr} T_r^{-1})^t = M_{sr}^t = M_{sr} = M_{rs} \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

#### Equação do Conjugado Eletromagnético

$$T_e = I_s^t \left( \frac{d}{d\phi} L_{sr} \right) I_r = I_s^t \left( \frac{d}{d\phi} A^{-1} L_{sr} B \right) I_r = I_s^t A^{-1} \left( \frac{d}{d\phi} L_{sr} \right) B I_r \Rightarrow \quad (\text{IV.26})$$

$$T_e = I_s^t A^t \left( \frac{d}{d\phi} L_{sr} \right) I_r = (A I_s)^t \left( \frac{d}{d\phi} L_{sr} \right) I_r = I_s^t \left( \frac{d}{d\phi} L_{sr} \right) I_r \Rightarrow \quad (\text{IV.27})$$

$$T_e = I_s^t \frac{d}{d\phi} (T_s^{-1} M_{sr} T_r) I_r = I_s^t \left[ \left( \frac{d}{d\phi} T_s^{-1} \right) M_{sr} T_r + T_s^{-1} M_{sr} \left( \frac{d}{d\phi} T_r \right) \right] I_r \Rightarrow \quad (\text{IV.28})$$

$$T_e = I_s^t \left[ -j E_s T_s^{-1} M_{sr} T_r + T_s^{-1} M_{sr} (j E_r T_r) \right] I_r \Rightarrow \quad (\text{IV.29})$$

$$T_e = j I_s^t T_s^{-1} \left[ -E_s M_{sr} + M_{sr} E_r \right] T_r I_r \Rightarrow \quad (\text{IV.30})$$

$$T_e = j (I_s^t T_s)^* \left[ M_{sr} E_r - E_s M_{sr} \right] I_r \Rightarrow \quad (\text{IV.31})$$

$$T_e = j (T_s I_s)^t \left[ M_{sr} E_r - E_s M_{sr} \right] I_r \Rightarrow \quad (\text{IV.32})$$

$$T_e = j I_s^t M T_r I_r, \quad (\text{IV.33})$$

$$\text{onde: } M T = M_{sr} E_r - E_s M_{sr} \text{ que é uma matriz de ordem } 2 \times r. \quad (\text{IV.34})$$

#### IV.5 Solução do Sistema de Equações em Regime Permanente

A solução do sistema de equações (IV.14) em regime permanente é obtida de forma analítica. Nesse caso, além de relações inerentes dos sistemas de variáveis utilizados, são feitas considerações sobre as grandezas elétricas envolvidas, impondo-se a condição de regime estabelecido.

As tensões aplicadas à máquina vêm de uma fonte trifásica equilibrada cujas tensões por fase são dadas por:

$$\begin{bmatrix} v_{sa} \\ v_{sb} \\ v_{sc} \end{bmatrix} = \sqrt{2}V \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ \cos(\omega t - 4\pi/3) \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.35})$$

onde:  $\omega$  é a frequência da rede e

$V$  a tensão eficaz fase-neutro da rede.

Da transformação de componentes simétricas:

$$[v_s] = A \begin{bmatrix} v_{sa} \\ v_{sb} \\ v_{sc} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (\text{IV.36})$$

$$[v_s] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \sqrt{2}V \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ \cos(\omega t - 4\pi/3) \end{bmatrix} = \sqrt{3/2}V \begin{bmatrix} 0 \\ e^{j\omega t} \\ e^{-j\omega t} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.37})$$

Para a segunda transformação, só as componentes de sequência positiva e negativa são utilizadas, então:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{s1} \\ \hat{u}_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-jd\phi} & 0 \\ 0 & e^{-j(d+hgm)\phi} \end{bmatrix} \sqrt{3/2}V \begin{bmatrix} e^{j\omega t} \\ e^{-j\omega t} \end{bmatrix} \quad \text{ou}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{s1} \\ \hat{u}_{s2} \end{bmatrix} = \sqrt{3/2}V \begin{bmatrix} e^{j(\omega t - d\phi)} \\ e^{-j(\omega t + (d+hgm)\phi)} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.38})$$

onde:  $\hat{u}_{s1}$  e  $\hat{u}_{s2}$  são as componentes de sequência positiva e negativa no sistema de coeficientes constantes,

$$\phi = \omega t + \phi_0, \quad (\text{IV.39})$$

Para as tensões do rotor:

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{B}_r \mathbf{i}_r = 0 \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{u}}_r = \mathbf{T}_r \mathbf{v}_r = 0, \quad \text{ou} \quad \hat{u}_{rk} = 0, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, r$$

O sistema de equações (IV.13) possui duas funções forçantes,  $\hat{u}_{s1}$  e  $\hat{u}_{s2}$ , podendo ser resolvido pelo método de superposição. A solução será uma composição das soluções correspondentes às entradas aplicadas isoladamente, de acordo com as propriedades dos circuitos lineares, podendo ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_s \\ \hat{i}_r \end{bmatrix} = \sqrt{3/2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix}^+ e^{j(\omega_s t - d\phi)} + \sqrt{3/2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix}^- e^{-j(\omega_s t + (d+hgm)\phi)} \quad (\text{IV.40})$$

Para a função forçante  $\begin{bmatrix} \hat{u}_{s1} \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{3/2} V \begin{bmatrix} e^{j(\omega_s t - d\phi)} \\ 0 \end{bmatrix}$ , a solução do sistema de equações (IV.14) corresponde à primeira parcela da Equação (IV.40), ficando as correntes de estator e rotor representadas da seguinte forma:

$$\hat{i}_s = \sqrt{3/2} \mathbf{I}_s^+ e^{j(\omega_s t - d\phi)} = \sqrt{3/2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{s1}^+ \\ \mathbf{I}_{s2}^+ \end{bmatrix} e^{j(\omega_s t - d\phi)} \quad (\text{IV.41})$$

$$\text{e} \quad \hat{i}_r = \sqrt{3/2} \mathbf{I}_r^+ e^{j(\omega_s t - d\phi)} = \sqrt{3/2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r_{3p(\bmod m)}}^+ \\ \mathbf{I}_{r_{9p(\bmod m)}}^+ \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{r_p}^+ \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{r_{(-9p)(\bmod m)}}^+ \\ \mathbf{I}_{r_{(-3p)(\bmod m)}}^+ \end{bmatrix} e^{j(\omega_s t - d\phi)} \quad (\text{IV.42})$$

Os índices das correntes do rotor correspondem à ordenação das colunas não nulas da matriz de indutâncias mútuas estabelecida no capítulo anterior.

São  $r$  correntes com índices variando entre zero e  $m-1$ .

Para a função forçante  $\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u}_{s2} \end{bmatrix} = \sqrt{3/2} V \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-j(\omega_s t + (d+hgm)\phi)} \end{bmatrix}$ , a solução das equações corresponde à segunda parcela da Equação (IV.40) e as correntes de estator e rotor são representadas por:

$$i_s = \sqrt{3/2} I_s^- e^{-j(\omega_s t + (d+hgm)\phi)} = \sqrt{3/2} \begin{bmatrix} I_{s1}^- \\ I_{s2}^- \end{bmatrix} e^{-j(\omega_s t + (d+hgm)\phi)} \quad (IV.43)$$

$$e \quad i_r = \sqrt{3/2} I_r^- e^{-j(\omega_s t + (d+hgm)\phi)} = \sqrt{3/2} \begin{bmatrix} I_{r_{3p(\text{mod } m)}}^- \\ I_{r_{9p(\text{mod } m)}}^- \\ \vdots \\ I_{r_p}^- \\ \vdots \\ I_{r_{(-9p)(\text{mod } m)}}^- \\ I_{r_{(-3p)(\text{mod } m)}}^- \end{bmatrix} e^{-j(\omega_s t + (d+hgm)\phi)} \quad (IV.44)$$

Aplicando-se a transformação inversa  $T_s^{-1}$ , obtém-se as correntes do estator no sistema de componentes simétricas:

$$i_s = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \end{bmatrix} = \sqrt{3/2} \begin{bmatrix} I_{s1}^+ e^{j\omega_s t} \\ I_{s2}^+ e^{j(\omega_s t + hgm\phi)} \end{bmatrix} + \sqrt{3/2} \begin{bmatrix} I_{s1}^- e^{-j(\omega_s t + hgm\phi)} \\ I_{s2}^- e^{-j\omega_s t} \end{bmatrix} \quad (IV.45)$$

Como no sistema de componentes simétricas, as correntes de sequência positiva e de sequência negativa são fasores girantes conjugados entre si, pode se escrever a seguinte relação:

$$I_{s1}^+ e^{j\omega_s t} + I_{s1}^- e^{-j(\omega_s t + hgm\phi)} = I_{s2}^{+*} e^{-j(\omega_s t + hgm\phi)} + I_{s2}^{-*} e^{j\omega_s t} \Rightarrow$$

$$I_{s1}^+ = I_{s2}^{-*} \text{ e } I_{s1}^- = I_{s2}^{+*} \quad (IV.46)$$

A conclusão é que o vetor  $I_s^-$  pode ser determinado pelo vetor  $I_s^+$ , através da seguinte relação:

$$I_s^- = I_s^+ = \begin{bmatrix} I_{s2}^{+*} \\ I_{s1}^{+*} \end{bmatrix} \quad (IV.47)$$

Analogamente, aplica-se a transformação inversa  $Tr^{-1}$  nas correntes do rotor e determina-se uma relação semelhante a do estator:

$$Ir^- = Ir^+ = \begin{bmatrix} Ir^{+*}_{-3p(\text{mod } m)} \\ Ir^{+*}_{-9p(\text{mod } m)} \\ \vdots \\ Ir^{+*}_p \\ \vdots \\ Ir^{+*}_{9p(\text{mod } m)} \\ Ir^{+*}_{3p(\text{mod } m)} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.48})$$

Assim, é suficiente resolver o sistema (IV.14) somente para a primeira função forçante,

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{s1} \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{3/2}V \begin{bmatrix} e^{j(\omega_s t - d\phi)} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.49})$$

A solução para a segunda função forçante é obtida pelas relações encontradas em (IV.47) e (IV.48) e, a solução total é determinada pela composição entre as duas correntes.

Como  $\phi = \omega_s t + \phi_0$ , então:

$$\hat{u}_{s1} = \sqrt{3/2}V e^{-jd\phi_0} e^{j(\omega_s t - d\phi)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.50})$$

Nesse caso,  $i_s = \sqrt{3/2}I_s e^{j(\omega_s t - d\phi)}$  e  $i_r = \sqrt{3/2}I_r e^{j(\omega_s t - d\phi)}$ , a derivada na Equação (IV.14) é aplicada nestas correntes e o sistema de equações (IV.13) toma o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss} & 0 \\ 0 & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} - j\omega_s \begin{bmatrix} E_s & \\ & E_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{sr} \\ M_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} + j\omega_0 \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{sr} \\ M_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \quad (\text{IV.51})$$

$$\text{onde } \omega_0 = \omega_s - d\omega \quad (\text{IV.52})$$

Como o vetor de tensões e os vetores de correntes são todos fasores girantes semelhantes com a mesma parte variante no tempo,  $e^{j(\omega u t - d\phi)}$ , pode-se dividir toda a Equação (IV.51) por esta função e resolvê-la fasorialmente. Neste caminho, o sistema de equações pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} U_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss} & 0 \\ 0 & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \Omega_s & \\ & \Omega_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{sr} \\ M_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix}, \quad (IV.53)$$

$$\text{onde: } \Omega_s = \omega_0 \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} - \omega E_s, \quad (IV.54)$$

$$\Omega_r = \omega_0 \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1] - \omega E_r, \quad (IV.55)$$

$r \text{ elementos}$

$$U_s = V[1, 0]^t e$$

$I_s$  e  $I_r$ , para esse caso, são fasores de sequência positiva.

Uma vez determinado  $I_s$  e  $I_r$ , a solução completa é expressa por:

$$\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \sqrt{3/2} e^{-j d \phi_0} [I_s \ I_r]^t e^{j(\omega u - d \omega) t} + \sqrt{3/2} e^{-j(d + h g m) \phi_0} \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} e^{-j(\omega u + (d + h g m) \omega) t} \quad (IV.56)$$

**Conjugado eletromagnético para regime permanente:**

Na expressão geral do conjugado para o sistema de coeficientes constantes, as correntes são substituídas pelas formas encontradas em (IV.56):

$$T_e = j i_s^* M T i_r \Rightarrow$$

$$T_e = j \left\{ \sqrt{3/2} e^{j d \phi_0} I_s^* e^{-j(\omega u - d \omega) t} + \sqrt{3/2} e^{j(d + h g m) \phi_0} I_s^* e^{-j(\omega u + (d + h g m) \omega) t} \right\} \\ M T \left\{ \sqrt{3/2} e^{-j d \phi_0} I_r e^{j(\omega u - d \omega) t} + \sqrt{3/2} e^{-j(d + h g m) \phi_0} I_r e^{-j(\omega u + (d + h g m) \omega) t} \right\} \Rightarrow \quad (IV.57)$$

$$T_e = j3/2 \left\{ I_s^{*t} MT Ir + I_s^{*t} MT Ir e^{-j h g m \phi_0} e^{-j(2\omega u + h g m \omega)t} + \right. \\ \left. I_s^{*t} MT Ir e^{j h g m \phi_0} e^{j(2\omega u + h g m \omega)t} + I_s^{*t} MT Ir \right\} \quad (IV.58)$$

Definindo-se

$$Ta_1 = 3/2 I_s^{*t} MT Ir, \quad Ta_2 = 3/2 I_s^{*t} MT Ir, \quad (IV.59)$$

$$Ts_1 = 3/2 I_s^{*t} MT Ir \text{ e } Ts_2 = 3/2 I_s^{*t} MT Ir, \text{ tem-se:} \quad (IV.60)$$

$$T_e = j \left\{ Ta_1 + Ta_2 + Ts_1 e^{j h g m \phi_0} e^{j(2\omega u + h g m \omega)t} + Ts_2 e^{-j h g m \phi_0} e^{-j(2\omega u + h g m \omega)t} \right\} \quad (IV.61)$$

Pode-se também mostrar que:

$$Ta_1 = -Ta_2^* \quad (IV.62)$$

$$Ts_1 = -Ts_2^* \quad (IV.63)$$

$$Ta_2^* = 3/2 (I_s^{*t} MT Ir)^* = 3/2 \left\{ \begin{bmatrix} I_s^* & I_s^* \\ I_s^* & I_s^* \end{bmatrix} MT \begin{bmatrix} Ir^* \\ Ir^* \\ \vdots \\ Ir^* \\ Ir_1^* \end{bmatrix} \right\}^* \Rightarrow \quad (IV.64)$$

$$Ta_2^* = 3/2 \left\{ \begin{bmatrix} I_s^* MT_{1,1} + I_s^* MT_{2,1} \\ I_s^* MT_{1,2} + I_s^* MT_{2,2} \\ \vdots \\ I_s^* MT_{1,k} + I_s^* MT_{2,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ir^* \\ Ir^* \\ \vdots \\ Ir^* \\ Ir_1^* \end{bmatrix} \right\}^* \Rightarrow \quad (IV.65)$$

$$Ta_2^* = 3/2 \left\{ (I_s^* MT_{1,1} + I_s^* MT_{2,1}) Ir_r + (I_s^* MT_{1,2} + I_s^* MT_{2,2}) Ir_{(r-1)} + \right. \\ \left. \dots + (I_s^* MT_{1,k} + I_s^* MT_{2,k}) Ir_1 \right\} \Rightarrow \quad (IV.66)$$

$$Ta2^* = [Is_1^* \quad Is_2^*] \begin{bmatrix} MT_{2,k} & MT_{2,k-1} & \dots & MT_{2,2} & MT_{2,1} \\ MT_{1,k} & MT_{1,k-1} & \dots & MT_{1,2} & MT_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ir_1 \\ \vdots \\ Ir_r \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (IV.67)$$

$$Ta2^* = [Is_1^* \quad Is_2^*] \begin{bmatrix} -MT_{1,1} & -MT_{1,2} & \dots & -MT_{1,k-1} & -MT_{1,k} \\ -MT_{2,1} & -MT_{2,2} & \dots & -MT_{2,k-1} & -MT_{2,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ir_1 \\ \vdots \\ Ir_r \end{bmatrix} = -Ta1 \Rightarrow \quad (IV.68)$$

A relação  $MT_{1,j} = -MT_{2,k-j+1}$ , ou seja que os elementos da linha 2 de MT são os simétricos dos elementos da linha 1 dispostos de forma invertida, vem da própria formação de MT, como mostrado a seguir:

$$MT = M_{sr}E_r - E_sM_{sr} \Rightarrow \quad (IV.69)$$

$$MT_{1,j} = M_{sr1,j}E_{rj} - E_{s1}M_{sr1,j} \quad e \quad MT_{2,j} = M_{sr2,j}E_{rj} - E_{s2}M_{sr2,j}, \quad (IV.70)$$

sendo  $M_{srk,j}$  o elemento da linha k e coluna j na matriz  $M_{sr}$ .

$$\text{Como } M_{sr1,j} = M_{sr2,r-j+1}, E_{s1} = -E_{s2} \text{ e } E_{rj} = -E_{rr-j+1} \Rightarrow \quad (IV.71)$$

$$MT_{1,j} = M_{sr2,r-j+1}E_{rj} - E_{s1}M_{sr2,r-j+1} \Rightarrow \quad (IV.72)$$

$$MT_{1,j} = M_{sr2,r-j+1}(-E_{rr-j+1}) - (-E_{s2})M_{sr2,r-j+1} \Rightarrow \quad (IV.73)$$

$$MT_{1,j} = -[M_{sr2,r-j+1}E_{rr-j+1} - E_{s2}M_{sr2,r-j+1}] = -MT_{2,r-j+1}. \quad (IV.74)$$

As relações  $E_{s1} = -E_{s2}$  e  $E_{rj} = -E_{rr-j+1}$  são facilmente visualizadas, nas expressões (IV.20) e (IV.23), pela substituição de  $d = -\frac{hgm}{2}$ .

É fácil ver, nos exemplos desenvolvidos no Capítulo III, que os elementos da primeira e da segunda linha são de frequências harmônicas simétricas porém, posicionados de forma invertida. Além disso as amplitudes  $M_v$ , para termos de harmônicas simétricas são iguais, ou seja:



$$m_{\nu}(1, j) = M_{\nu} e^{j\nu\phi} \quad e \quad m_{\nu}(2, r-j+1) = M_{\nu} e^{-j\nu\phi} \quad (\text{IV.75})$$

Como os elementos da matriz  $M_{sr}$  não contém as partes exponenciais dos elementos da matriz  $L_{sr}$ , então os elementos que guardam a relação de posição  $(1, j)$  e  $(2, r-j+1)$ , na matriz  $M_{sr}$  são iguais às amplitudes  $M_{\nu}$  e por isso iguais entre si.

A relação  $Ts_1 = -Ts_2^*$  pode ser mostrada de maneira análoga.

Substituindo-se as relações (IV.62) e (IV.63) na Equação (IV.61), tem-se:

$$Te = j \left\{ Ta_1 - Ta_1^* + Ts_1 e^{j h g m \phi_0} e^{j(2\omega u + h g m \omega) t} - Ts_1^* e^{-j h g m \phi_0} e^{-j(2\omega u + h g m \omega) t} \right\} \Rightarrow \quad (\text{IV.76})$$

$$Te = j \left\{ j 2 \text{Im}\{Ta_1\} + j 2 \text{Im}\left[Ts_1 e^{j h g m \phi_0} e^{j(2\omega u + h g m \omega) t}\right] \right\} \Rightarrow \quad (\text{IV.77})$$

$$Te = \left\{ Tea - Tes \sin\left[(2\omega u + h g m \omega) t + h g m \phi_0 + \alpha s\right] \right\}, \quad (\text{IV.78})$$

$$\text{onde: } Tes e^{j\alpha s} = 2Ts_1 = Ts_1 e \quad (\text{IV.79})$$

$$Tea = -\text{Im}\{2Ta_1\} \quad (\text{IV.80})$$

Exemplo IV.1: Máquina com número de barras  $m=28$  e número de par de pólos  $p=2$

$$\text{Número de colunas da matriz } M_{sr}: r = \frac{g}{2} \times \frac{28}{2} \Rightarrow g=1 \quad e \quad r=7 \Rightarrow$$

$$s = \pm \frac{r+h}{3} = \pm \frac{7+h}{3} \Rightarrow h=-1 \quad e \quad s=\pm 2 \Rightarrow d = -\frac{1 \times (-1) \times 28}{2} = 14 \Rightarrow$$

$$Ts = \text{diag}\left[e^{-j14\phi} \quad e^{j14\phi}\right],$$

$$Tr = \text{diag}\left[e^{-j38\phi} \quad e^{-j24\phi} \quad e^{-j12\phi} \quad 1 \quad e^{j12\phi} \quad e^{j24\phi} \quad e^{j38\phi}\right],$$

$$[\hat{u}_s \quad \hat{u}_r]^t = [\hat{u}_{s1}, \hat{u}_{s2}, 0, 0, \dots, 0]^t,$$

$$[i_s \ i_r]^t = [i_{s_1}, i_{s_2}, i_{r_6}, i_{r_{18}}, i_{r_2}, i_{r_{14}}, i_{r_{26}}, i_{r_{10}}, i_{r_{22}}]^t,$$

$$R_{ss} = \text{diag}[R_s \ R_s],$$

$$R_{rr} = \text{diag}[R_{r6}, R_{r18}, R_{r2}, R_{r14}, R_{r26}, R_{r10}, R_{r22}],$$

$$\text{onde: } R_{rk} = 2r_a + C_k r_b \quad \text{e} \quad C_k = 4\text{sen}^2 k\pi/m$$

$$L_{ss} = \text{diag}[L_{s1} \ L_{s2}] \quad \text{e}$$

$$L_{rr} = \text{diag}[L_{r6}, L_{r18}, L_{r2}, L_{r14}, L_{r26}, L_{r10}, L_{r22}],$$

$$\text{onde: } L_{rk} = 2l_a + C_k l_b + \frac{2 \mu_0 \pi R l}{m \delta}$$

As harmônicas são encontradas pela matriz apresentada na Equação (III.66) e os elementos da matriz  $M_{sr}$  pela Equação (IV.5), onde  $M_{-v} = M_v$ . Assim:

$$L_{sr} = \begin{bmatrix} m_{-22} & m_{-10} & m_2 & m_{14} & m_{26} & m_{38} & m_{50} \\ m_{-50} & m_{-38} & m_{-26} & m_{-14} & m_{-2} & m_{10} & m_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$M_{sr} = \begin{bmatrix} M_{22} & M_{10} & M_2 & M_{14} & M_{26} & M_{38} & M_{50} \\ M_{50} & M_{38} & M_{26} & M_{14} & M_2 & M_{10} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$E_s = \text{diag}[-14 \ 14] \quad \text{e} \quad E_r = \text{diag}[-36 \ -24 \ -12 \ 0 \ 12 \ 24 \ 36],$$

$$M_T = \begin{bmatrix} -22M_{22} & -10M_{10} & 2M_2 & 14M_{14} & 26M_{26} & 38M_{38} & 50M_{50} \\ -50M_{50} & -38M_{38} & -2M_{26} & -14M_{14} & -2M_2 & 10M_{10} & 22M_{22} \end{bmatrix},$$

$$T_e = J[i_{s_1}^*, i_{s_2}^*] M_T [i_{r_6}, i_{r_{18}}, i_{r_2}, i_{r_{14}}, i_{r_{26}}, i_{r_{10}}, i_{r_{22}}]^t \Rightarrow$$

$$Te = j[is_1^*, is_2^*] \begin{bmatrix} -22M_{22}ir_6 - 10M_{10}ir_{18} + 2M_2ir_2 + 14M_{14}ir_{14} + 26M_{26}ir_{26} + \\ -50M_{50}ir_6 - 38M_{38}ir_{18} - 26M_{26}ir_2 - 14M_{14}ir_{14} - 2M_2ir_{26} + \\ 38M_{38}ir_{10} + 50M_{50}ir_{22} \\ 10M_{10}ir_{10} + 22M_{22}ir_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$Te = j \left[ 22M_{22}(is_2^*ir_{22} - is_1^*ir_6) + 50M_{50}(is_1^*ir_{22} - is_2^*ir_6) + \right. \\ 10M_{10}(is_2^*ir_{10} - is_1^*ir_{18}) + 38M_{38}(is_1^*ir_{10} - is_2^*ir_{18}) + \\ 2M_2(is_1^*ir_2 - is_2^*ir_{26}) + 26M_{26}(is_1^*ir_{26} - is_2^*ir_2) + \\ \left. 14M_{14}(is_1^*ir_{14} - is_2^*ir_{14}) \right] \Rightarrow$$

Cada parcela corresponde aos conjugados por frequência e podem ser colocadas da seguinte forma:

$$Te_{22} = j22M_{22}(is_2^*ir_{22} - is_1^*ir_6) = j22M_{22}(is_1^*ir_6 - is_2^*ir_6) \Rightarrow$$

$$Te_{22} = -22M_{22}(2Im\{is_1^*ir_6\}) = 2(-22)M_{22}(isy_1ir_{x6} - isx_1ir_{y6})$$

$$Te_{50} = j50M_{50}(is_1^*ir_{22} - is_2^*ir_6) = j50M_{50}(is_1^*ir_{22} - is_1^*ir_{22}) \Rightarrow$$

$$Te_{50} = -50M_{50}(2Im\{is_1^*ir_{22}\}) = 2(50)M_{50}(isy_1ir_{x22} - isx_1ir_{y22})$$

Por analogia:

$$Te_{10} = -10M_{10}(2Im\{is_1^*ir_{18}\}) = 2(-10)M_{10}(isy_1ir_{x18} - isx_1ir_{y18})$$

$$Te_{38} = -38M_{38}(2Im\{is_1^*ir_{10}\}) = 2(38)M_{38}(isy_1ir_{x10} - isx_1ir_{y10})$$

$$Te_2 = -2M_2(2Im\{is_1^*ir_2\}) = 2(2)M_2(isy_1ir_{x2} - isx_1ir_{y2})$$

$$Te_{26} = -26M_{26} (2Im \{i_{s1}^* i_{r_{26}}\}) = 2(26)M_{26} (i_{sy} i_{rx_{26}} - i_{sx} i_{ry_{26}})$$

$$Te_{14} = -14M_{14} (2Im \{i_{s1}^* i_{r_{14}}\}) = 2(14)M_{14} (i_{sy} i_{rx_{14}} - i_{sx} i_{ry_{14}})$$

Generalizando:

$$Te_v = (2v)M_v (i_{sy} i_{rx_v}(\text{mod } m) - i_{sx} i_{ry_v}(\text{mod } m)), \quad (\text{IV.81})$$

onde  $v=np$  é uma harmônica da primeira linha de  $L_{sr}$ .

#### IV.6 Solução Para o Regime Dinâmico

Para a solução do regime dinâmico, tal como a partida da máquina, o sistema de equações diferenciais pode ser resolvido através de um método numérico de integração. O sistema de equações será composto pelas equações de tensões e correntes apresentadas na Equação (IV.14), pela equação mecânica utilizada para máquinas elétricas e pela expressão do conjugado eletromagnético mostrada na Equação (IV.33).

As derivadas das correntes elétricas para cada passo de integração são calculadas através da seguinte equação:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{sr} \\ M_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{Q}_s \\ \dot{Q}_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{ss} & \\ & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} E_s & \\ & E_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{sr} \\ M_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{IV.82})$$

#### IV.7 Retorno ao Sistema Original

Resolvido o sistema de equações, as grandezas elétricas que constituem a solução devem ser convertidas para o sistema original de variáveis. Este retorno é feito através da multiplicação das matrizes inversas das transformações pelas grandezas elétricas encontradas no sistema a coeficientes constantes, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}_{012} = \begin{bmatrix} T_s^{-1} & \\ & T_r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \quad e \quad (\text{IV.83})$$

$$\begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}_{012} \quad (\text{IV.84})$$

O mecanismo das operações de retorno ao sistema de variáveis originais pode ser mostrado através do Exemplo IV.2 como continuidade do Exemplo IV.1.

Exemplo IV.2:  $m=28$ ,  $p=2$ ,  $g=1$ ,  $r=7$ ,  $h=-1$  e  $d=14$ .

Correntes no sistema 012 ou de componentes simétricas:

$$i_{s_1} = i_{s_1} e^{j14\phi} \quad e \quad i_{s_2} = i_{s_2} e^{-j14\phi} \quad (\text{IV.85})$$

$$\begin{cases} i_{r_6} = i_{r_6} e^{j36\phi}, & i_{r_{18}} = i_{r_{18}} e^{j24\phi}, & i_{r_2} = i_{r_2} e^{j12\phi}, \\ i_{r_{14}} = i_{r_{14}}, \\ i_{r_{26}} = i_{r_{26}} e^{-j12\phi}, & i_{r_{10}} = i_{r_{10}} e^{-j24\phi} & e \quad i_{r_{22}} = i_{r_{22}} e^{-j36\phi} \end{cases} \quad (\text{IV.86})$$

Em regime permanente:

$$\begin{cases} i_{r_6} = \sqrt{3/2} I_{r_6}^+ e^{j(\omega_{ut} + 22\phi)} + \sqrt{3/2} I_{r_6}^- e^{-j(\omega_{ut} - 50\phi)} \\ i_{r_{18}} = \sqrt{3/2} I_{r_{18}}^+ e^{j(\omega_{ut} + 10\phi)} + \sqrt{3/2} I_{r_{18}}^- e^{-j(\omega_{ut} - 38\phi)} \\ i_{r_2} = \sqrt{3/2} I_{r_2}^+ e^{j(\omega_{ut} - 2\phi)} + \sqrt{3/2} I_{r_2}^- e^{-j(\omega_{ut} - 26\phi)} \\ i_{r_{14}} = \sqrt{3/2} I_{r_{14}}^+ e^{j(\omega_{ut} - 14\phi)} + \sqrt{3/2} I_{r_{14}}^- e^{-j(\omega_{ut} - 14\phi)} \\ \quad = 2\sqrt{3/2} \operatorname{Re} \left[ I_{r_{14}}^+ e^{j(\omega_{ut} - 14\phi)} \right] \\ i_{r_{26}} = \sqrt{3/2} I_{r_{26}}^+ e^{j(\omega_{ut} - 26\phi)} + \sqrt{3/2} I_{r_{26}}^- e^{-j(\omega_{ut} - 2\phi)} \\ i_{r_{10}} = \sqrt{3/2} I_{r_{10}}^+ e^{j(\omega_{ut} - 38\phi)} + \sqrt{3/2} I_{r_{10}}^- e^{-j(\omega_{ut} + 10\phi)} \\ i_{r_{22}} = \sqrt{3/2} I_{r_{22}}^+ e^{j(\omega_{ut} - 50\phi)} + \sqrt{3/2} I_{r_{22}}^- e^{-j(\omega_{ut} + 22\phi)} \end{cases} \quad (\text{IV.87})$$

$$\begin{cases} i_{s1} = \sqrt{3/2} I_{s1}^+ e^{j\omega_{ut}} + \sqrt{3/2} I_{s1}^- e^{-j(\omega_{ut}-28\phi)} \\ i_{s2} = \sqrt{3/2} I_{s2}^+ e^{j(\omega_{ut}-28\phi)} + \sqrt{3/2} I_{s2}^- e^{-j\omega_{ut}} \end{cases} \quad (\text{IV.88})$$

Expressões das correntes do estator no sistema de variáveis originais:

$$\begin{bmatrix} isa \\ isb \\ isc \end{bmatrix} = 1/\sqrt{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ is1 \\ is2 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (\text{IV.89})$$

$$isa = 1/\sqrt{3} [is_1 e^{j14\phi} + is_2 e^{-j14\phi}] = 2/\sqrt{3} \text{Re}\{is_1 e^{j14\phi}\},$$

$$isb = 1/\sqrt{3} [is_1 e^{j(14\phi+2\pi/3)} + is_2 e^{-j(14\phi+2\pi/3)}] = 2/\sqrt{3} \text{Re}\{is_1 e^{j(14\phi+2\pi/3)}\} e$$

$$isc = 1/\sqrt{3} [is_1 e^{j(14\phi-2\pi/3)} + is_2 e^{-j(14\phi-2\pi/3)}] = 2/\sqrt{3} \text{Re}\{is_1 e^{j(14\phi-2\pi/3)}\}.$$

(IV.90)

Em regime permanente:

$$isa = \sqrt{2} [ \text{Re}\{I_{s1}^+ e^{j\omega_{ut}}\} + \text{Re}\{I_{s1}^- e^{-j(\omega_{ut}-28\phi)}\} ],$$

$$isb = \sqrt{2} [ \text{Re}\{I_{s1}^+ e^{j(\omega_{ut}+2\pi/3)}\} + \text{Re}\{I_{s1}^- e^{-j(\omega_{ut}-28\phi-2\pi/3)}\} ] e \quad (\text{IV.91})$$

$$isc = \sqrt{2} [ 2\text{Re}\{I_{s1}^+ e^{j(\omega_{ut}-2\pi/3)}\} + 2\text{Re}\{I_{s1}^- e^{-j(\omega_{ut}-28\phi+2\pi/3)}\} ].$$

Expressões das correntes do rotor no sistema de variáveis originais:

$$\begin{bmatrix} ir1 \\ ir2 \\ ir3 \\ \vdots \\ ir28 \end{bmatrix} = 1/\sqrt{28} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & b^{-1} & b^{-2} & b^{-3} & \dots & b^{-28} & b^{-27} \\ 1 & b^{-2} & b^{-4} & b^{-6} & \dots & b^{-52} & b^{-54} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b^{-27} & b^{-54} & b^{-81} & \dots & b^{-702} & b^{-729} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ir0 \\ ir1 \\ ir2 \\ \vdots \\ ir27 \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.92})$$

onde:  $i_{rj}$ , no lado esquerdo, é a corrente de um enrolamento de rotor, como definida na seção II.1 e que também é denotada por  $i_{ra}$  e  $[i_{rk}]_{012}$ , é o vetor de correntes no sistema de componentes simétricas, sendo nulas as correntes correspondentes às colunas nulas na matriz  $L_{sr}$ .

Convém lembrar que a matriz  $L_{sr} = A L_{sr} B^{-1}$ , após a sua definição na Seção III.1, passou a ser representada apenas pelas suas colunas não nulas à partir da Expressão III.45. Portanto, no exemplo que se desenvolve, somente  $i_{r_2}$ ,  $i_{r_6}$ ,  $i_{r_{10}}$ ,  $i_{r_{14}}$ ,  $i_{r_{18}}$ ,  $i_{r_{22}}$  e  $i_{r_{26}}$  são diferentes de zero.

Para certificação da afirmação anterior, as equações do rotor no sistema de componentes simétricas são reescritas e analisadas:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_2 & m_{-26} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_{-22} & m_{-50} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_{38} & m_{10} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_{14} & m_{-14} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_{-10} & m_{-38} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_{50} & m_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_{28} & m_{-2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \end{bmatrix} + \left[ R_{rr} + \frac{d}{dt} L_{rr} \right] \begin{bmatrix} i_{r0} \\ i_{r1} \\ \vdots \\ i_{r27} \end{bmatrix}. \quad (IV.93)$$

As equações correspondentes às linhas nulas da matriz  $L_{sr}^t$  (ou colunas nulas de  $L_{sr}$ ) não possuem termos em função das correntes do estator. Como a matriz resultante da operação  $R_{rr} + \frac{d}{dt}L_{rr}$  é diagonal, as equações em análise passam a ter soluções triviais nulas, sendo reduzidas à seguinte forma:

$$\left[ R_{rk} + \frac{d}{dt}L_{rk} \right] i_{rk} = 0 \quad (IV.94)$$

Assim, as correntes calculadas em (IV.92) podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} i_{r_1} &= 1/\sqrt{28}(i_{r2} + i_{r6} + i_{r10} + i_{r14} + i_{r18} + i_{r22} + i_{r26}) \\ i_{r_2} &= 1/\sqrt{28}(b^{-2}i_{r2} + b^{-6}i_{r6} + b^{-10}i_{r10} + b^{-14}i_{r14} + \\ &\quad b^{-18}i_{r18} + b^{-22}i_{r22} + b^{-26}i_{r26}) \\ i_{r_3} &= 1/\sqrt{28}(b^{-4}i_{r2} + b^{-12}i_{r6} + b^{-20}i_{r10} + b^{-28}i_{r14} + \\ &\quad b^{-36}i_{r18} + b^{-44}i_{r22} + b^{-52}i_{r26}) \\ &\vdots \\ i_{r_{k+1}} &= 1/\sqrt{28}(b^{-2k}i_{r2} + b^{-6k}i_{r6} + b^{-10k}i_{r10} + b^{-14k}i_{r14} + \\ &\quad b^{-18k}i_{r18} + b^{-22k}i_{r22} + b^{-26k}i_{r26}) \\ &\vdots \\ i_{r_{28}} &= 1/\sqrt{28}(b^{-54}i_{r2} + b^{-162}i_{r6} + b^{-270}i_{r10} + b^{-378}i_{r14} + \\ &\quad b^{-486}i_{r18} + b^{-594}i_{r22} + b^{-702}i_{r26}) \end{aligned} \quad (IV.95)$$

Como as componentes simétricas obedecem as relações

$$i_{r_k} = i_{r_{m-k}}^* \quad e \quad (IV.96)$$

$$b^{1k} = (b^{1(m-k)})^* \Rightarrow \quad (IV.97)$$

$$i_{r_{k+1}} = 1/\sqrt{28} (2\text{Re}\{b^{-2k}i_{r_2} + b^{-6k}i_{r_6} + b^{-10k}i_{r_{10}} + 1/2b^{-14k}i_{r_{14}}\}) \quad (IV.98)$$



Substituindo-se as correntes do sistema de componentes simétricas pelas suas expressões dadas em função das correntes do sistema a coeficientes constantes, tem-se:

$$i_{r_{k+1}} = \frac{2}{\sqrt{28}} \operatorname{Re} \left[ b^{-2k} i_{r_2} e^{j12\phi} + b^{-6k} i_{r_8} e^{j36\phi} + b^{-10k} i_{r_{10}} e^{-j24\phi} + 1/2 b^{-14k} i_{r_{14}} \right]$$

$$\text{ou} \quad (IV.99)$$

$$i_{r_{k+1}} = \frac{2}{\sqrt{28}} \operatorname{Re} \left[ i_{r_2} e^{j(12\phi - 4k\pi/m)} + i_{r_8} e^{j(36\phi - 12k\pi/m)} + i_{r_{10}} e^{-j(24\phi + 20k\pi/m)} + i_{r_{14}} e^{-j28k\pi/m} \right]. \quad (IV.100)$$

Em regime permanente:

$$(IV.101)$$

$$i_{r_{k+1}} = \sqrt{6/28} \operatorname{Re} \left\{ I_{r_2}^+ e^{j(\omega_{ut} - 2\phi - 4k\pi/m)} + I_{r_2}^- e^{-j(\omega_{ut} - 26\phi + 4k\pi/m)} + I_{r_8}^+ e^{j(\omega_{ut} + 22\phi - 12k\pi/m)} + I_{r_8}^- e^{-j(\omega_{ut} - 50\phi + 12k\pi/m)} + I_{r_{10}}^+ e^{j(\omega_{ut} - 38\phi - 20k\pi/m)} + I_{r_{10}}^- e^{-j(\omega_{ut} + 10\phi + 20k\pi/m)} + I_{r_{14}}^+ e^{j(\omega_{ut} - 14\phi - 28k\pi/m)} \right\}$$

Como  $I_{r_k}^+ = I_{r_{m-k}}^{-*}$  e  $\operatorname{Re}\{z\} = \operatorname{Re}\{z^*\}$ , tem-se:

$$i_{r_{k+1}} = \sqrt{6/28} \operatorname{Re} \left\{ I_{r_2}^+ e^{j(\omega_{ut} - 2\phi - 4k\pi/m)} + I_{r_{28}}^+ e^{j(\omega_{ut} - 26\phi - 52k\pi/m)} + I_{r_8}^+ e^{j(\omega_{ut} + 22\phi - 12k\pi/m)} + I_{r_{22}}^+ e^{j(\omega_{ut} - 50\phi - 44k\pi/m)} + I_{r_{10}}^+ e^{j(\omega_{ut} - 38\phi - 20k\pi/m)} + I_{r_{18}}^+ e^{j(\omega_{ut} + 10\phi - 38k\pi/m)} + I_{r_{14}}^+ e^{j(\omega_{ut} - 14\phi - 28k\pi/m)} \right\} \quad (IV.102)$$

$$\begin{aligned}
i_{r_{k+1}} = \sqrt{6/28} & ( |Ir_2^+| \cos(\omega_{ut} - 2\phi + \theta_2 - 2k\gamma) + |Ir_6^+| \cos(\omega_{ut} + 22\phi + \theta_6 - 6k\gamma) + \\
& |Ir_{10}^+| \cos(\omega_{ut} - 38\phi + \theta_{10} - 10k\gamma) + |Ir_{14}^+| \cos(\omega_{ut} - 14\phi + \theta_{14} - 14k\gamma) + \\
& |Ir_{18}^+| \cos(\omega_{ut} + 10\phi + \theta_{18} - 18k\gamma) + |Ir_{22}^+| \cos(\omega_{ut} - 50\phi + \theta_{22} - 22k\gamma) + \\
& |Ir_{26}^+| \cos(\omega_{ut} - 26\phi + \theta_{26} - 26k\gamma) ) \Rightarrow
\end{aligned} \tag{IV.103}$$

$$i_{r_{k+1}} = \sqrt{6/28} \sum_{l=1}^r |Ir_l^+| \cos(\omega_{ut} - \phi_l + \theta_l - lk\gamma), \tag{IV.104}$$

onde:  $l = l(k)$  que é o índice das colunas não nulas na ordem encontrada,  
 $\phi_l = (Er_l + d)\phi$ ,  $Er_l$  é um elemento da diagonal de  $Er$ ,  
 $\theta_l$  é o ângulo de  $Ir_l^+$ , encontrado na solução das equações do sistema a  
coeficientes constantes e  $\gamma = 2\pi/m$ .

#### IV.8 Conclusões

O desenvolvimento do modelo da máquina trifásica foi mostrado nos Capítulos II, III e IV. O sistema de equações final apresenta ordem reduzida e matrizes com todos os elementos invariantes no tempo. A determinação das correntes no sistema de variáveis a coeficientes constantes, para regime permanente e regime transitório representa a solução do modelo. Esta solução, que foi aqui apresentada, pode ser calculada nos outros dois sistemas, o de componentes simétricas e o de variáveis originais, utilizando-se as transformações de variáveis. Para calcular as correntes das barras do rotor basta utilizar a equação matricial (II.5) e o cálculo dos conjugados parasitas pode também ser obtido diretamente em função das correntes. A partir desta modelagem realizar-se-á, nos dois próximos capítulos, o desenvolvimento dos modelos das máquina monofásica e trifásica de gaiola dupla.

## CAPÍTULO V

### MÁQUINA MONOFÁSICA

O motor monofásico tradicional possui dois enrolamentos no estator posicionados com um deslocamento de  $90^\circ$  elétricos entre si, sendo um deles usado apenas na partida da máquina. Esse enrolamento é ligado em série com um capacitor para proporcionar a defasagem necessária na corrente que produz o campo girante resultante de partida. O enrolamento de partida e o capacitor são desligados após a máquina atingir velocidade próxima de regime permanente, ficando o funcionamento apenas por conta do outro enrolamento.

A máquina pode ser modelada de forma análoga à máquina trifásica, ficando o sistema de equações escrito, nas variáveis originais, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} v_{sp} \\ v_{sa} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sp} & 0 \\ 0 & R_{sa} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_{sa} \\ i_{r1} \\ i_{r2} \\ \vdots \\ i_{rm} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{sp} & 0 & [L_{srp}] \\ 0 & L_{sa} & [L_{sra}] \\ [L_{rsp}] & [L_{rsa}] & [L_{rr}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_{sa} \\ i_{r1} \\ i_{r2} \\ \vdots \\ i_{rm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v_c \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (V.1)$$

onde:  $R_{sp}$  é a resistência do enrolamento principal do estator,

$R_{sa}$  é a resistência do enrolamento auxiliar do estator,

$L_{sp}$  é a indutância própria do enrolamento principal,

$L_{sa}$  é a indutância própria do enrolamento auxiliar,

$L_{srp}$  é a matriz de indutâncias mútuas entre o enrolamento principal do estator e os enrolamentos do rotor,

$L_{sra}$  é a matriz de indutâncias mútuas entre o enrolamento auxiliar do estator e os enrolamentos do rotor.

$R_{rr}$  e  $L_{rr}$  são as matrizes de resistências e indutâncias do rotor. (São as mesmas matrizes já mostradas nas equações (II.59) e (II.60) para a máquina trifásica),

$v_{sp} = \sqrt{2} V_p \cos \omega t$  é a tensão aplicada ao enrolamento principal,

$v_{sa} = \sqrt{2} V_a \cos \omega t$  é a tensão aplicada ao enrolamento auxiliar durante

a partida,

$i_{sp}$  e  $i_{sa}$  são as correntes dos enrolamentos principal e auxiliar do estator e

$i_{rk}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , é a corrente de um dos enrolamentos do rotor,

$$\text{sendo: } L_{sp} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4 \mu_0 l R}{\pi \delta} \left( \frac{w_p k_{wpn}}{pn} \right)^2 + l_{sdp}, \quad (V.2)$$

$$L_{sa} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4 \mu_0 l R}{\pi \delta} \left( \frac{w_a k_{wan}}{pn} \right)^2 + l_{sda}, \quad (V.3)$$

$l_{sdp}$  e  $l_{sda}$  impedâncias de dispersão (de ranhura + zig-zag + cabeça de bobina) dos enrolamentos principal e auxiliar respectivamente,

$$L_{srp} = \sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{\infty} L_{srpn} [\cos n p \phi \cos n(p\phi + p2\pi/m) \dots \cos n(p\phi + p(m-1)2\pi/m)], \quad (V.4)$$

$$L_{sra} = \sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{\infty} L_{sran} [\cos n(p\phi + \pi/2) \cos n(p\phi + p2\pi/m + \pi/2) \dots \cos n(p\phi + p(m-1)2\pi/m + \pi/2)], \quad (V.5)$$

$$L_{rsp} = L_{srp}^t \quad \text{e} \quad L_{rsa} = L_{sra}^t, \quad (V.6)$$

$$L_{srpn} = \frac{4 \mu_0 l R w_p K_{wpn}}{\pi \delta n^2 p^2} \sin \frac{np\pi}{m}, \quad (V.7)$$

$$L_{sran} = \frac{4 \mu_0 l R w_a K_{wan}}{\pi \delta n^2 p^2} \sin \frac{np\pi}{m}, \quad (V.8)$$

$w_p$  o número de espiras do enrolamento principal,

$w_a$  o número de espiras do enrolamento auxiliar,

$k_{wpn}$  o fator de enrolamento do enrolamento principal e

$k_{wan}$  o fator de enrolamento do enrolamento auxiliar.

As expressões para o cálculo das indutâncias  $L_{srpn}$  e  $L_{sran}$ , mostradas acima, já foram apresentadas para a máquina trifásica onde foram calculadas para cada enrolamento individual.

Como no estator, os enrolamentos auxiliar e principal são colocados a  $90^\circ$  elétricos não há indutância mútua entre eles.

### V.1 Estudo do Regime Permanente

Em regime permanente só o enrolamento principal do estator está energizado, ficando o sistema de equações com o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} v_{sp} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sp} & \\ & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{sp} & L_{srp} \\ L_{rsp} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix} \quad (V.9)$$

Como foi feito para a modelagem da máquina trifásica, uma transformação de componentes simétricas é aplicada ao sistema de equações nas variáveis originais com o objetivo de diagonalizar as matrizes  $R_{rr}$  e  $L_{rr}$  e simplificar as matrizes  $L_{srp}$  e  $L_{rsp}$ . Neste caso, só é necessário aplicar a transformação nas variáveis do rotor porque o estator é monofásico e só possui uma equação.

A transformação de variáveis é aplicada aos vetores de tensão e correntes através da matriz  $\begin{bmatrix} 1 & \\ & B \end{bmatrix}$ , sendo  $B$  a mesma matriz  $m \times m$  utilizada no capítulo III e mostrada na Equação (III.2). Esta matriz só afeta as variáveis do rotor.

Assim:

$$\begin{bmatrix} v_{sp} \\ 0 \end{bmatrix}_{012} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{sp} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (V.10)$$

$$\text{e } \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix}_{012} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix} \quad (V.11)$$

A Equação (V.9) é substituída no lado direito da Equação (V.10) e o vetor de correntes nas variáveis originais na nova expressão é substituído por  $\begin{bmatrix} 1 & \\ & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix}_{012}$ , resultando em:

$$\begin{bmatrix} v_{sp} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sp} & \\ & B R_{rr} B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{sp} & L_{srp} B^{-1} \\ B L_{rsp} & B L_{rr} B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix}, \quad (V.12)$$

$$\begin{bmatrix} v_{sp} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sp} & \\ & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{sp} & L_{srp} B^{-1} \\ B L_{rsp} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix}, \quad (V.13)$$

onde:  $R_{rr}$  e  $L_{rr}$  são as mesmas matrizes mostradas no Capítulo III para a máquina trifásica e

$$\mathcal{L}_{srp} B^{-1} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \mathcal{L}_{srpn} \begin{bmatrix} \cos n\phi & \cos n(p\phi + p_2\pi/m) & \dots & \cos n(p\phi + p_{(m-1)}2\pi/m) \end{bmatrix} B^{-1}, \quad (V.14)$$

cujo desenvolvimento é mostrado a seguir:

$$\mathcal{L}_{srp} B^{-1} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_{srpn}}{2} \left\{ e^{jnp\phi} \begin{bmatrix} 1 & b^{np} & \dots & b^{np(m-1)} \end{bmatrix} + e^{-jnp\phi} \begin{bmatrix} 1 & b^{-np} & \dots & b^{-np(m-1)} \end{bmatrix} \right\} B^{-1} \quad (V.15)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{srp} B^{-1} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_{srpn}}{2\sqrt{m}} \left\{ e^{jnp\phi} \sum_{k=0}^{m-1} \begin{bmatrix} b^{knp} & b^{k(np-1)} & b^{k(np-2)} & \dots & b^{k(np-(m-1))} \end{bmatrix} + e^{-jnp\phi} \sum_{k=0}^{m-1} \begin{bmatrix} b^{-knp} & b^{-k(np+1)} & b^{-k(np+2)} & \dots & b^{-k(np+(m-1))} \end{bmatrix} \right\} \quad (V.16)$$

A expressão (V.16) pode ser simplificada escrevendo-a em função de um somatório de  $-\infty$  a  $+\infty$ :

$$\mathcal{L}_{srp} = \mathcal{L}_{srp} B^{-1} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_{srpn}}{2\sqrt{m}} e^{jnp\phi} \sum_{k=0}^{m-1} \begin{bmatrix} b^{knp} & b^{k(np-1)} & b^{k(np-2)} & \dots & b^{k(np-(m-1))} \end{bmatrix} \quad (V.17)$$

As expressões  $\sum_{k=0}^{m-1} b^{k(np-1)}$  são iguais a  $m$  ou a zero, dependendo apenas se o valor de  $np-1$  é múltiplo de  $m$  ou não. Quando  $np-1$  é múltiplo de  $m$ ,  $b^{np-1}$  é igual a 1 e

$$\sum_{k=0}^{m-1} b^{k(np-1)} = m. \quad (V.18)$$

A situação aqui é semelhante à formação da matriz de mútuas na máquina trifásica. Cada valor de  $l$  corresponde a uma coluna da matriz  $\mathcal{L}_{srp}$  que contém apenas um elemento da forma:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_{srpn}}{2\sqrt{m}} e^{jnp\phi} \sum_{k=0}^{m-1} b^{k(np-1)}. \quad (V.19)$$

Por isso, uma vez fixados  $m$  e  $p$  para uma determinada máquina, existirá uma componente não nula, correspondente a harmônica  $n$ , somente na coluna  $l$  onde,  $np-1$  é múltiplo de  $m$ .

Da mesma forma que na máquina trifásica, variando-se  $n$  preenche-se um número  $r$  de colunas não nulas da matriz, somando-se os termos das harmônicas seguintes aos termos já posicionados. Com isso, cada elemento, ou coluna não nula, da matriz será igual a um somatório de componentes harmônicas exclusivas (cada ordem harmônica só ocorre em um dos elementos). Assim, como na máquina trifásica, pode-se representar em cada elemento não nulo da matriz, apenas uma componente harmônica, ficando o elemento calculado pelas expressões:

$$\frac{\sqrt{m}}{2} L_{srpn} e^{jnp\phi} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp_v} e^{jnp\phi}. \quad (V.20)$$

Para máquina monofásica, os elementos da matriz  $L_{srp}$  devem ser indicados pela variação de  $n$  na Equação (V.17), simultaneamente, no sentido positivo e no sentido negativo, para corresponder à expressão original (V.14). Com isso, para cada harmônica  $n$ , em (V.17), obtém-se dois elementos não nulos, correspondente a um termo com  $n$  positivo (sequência positiva) e a um termo com  $n$  negativo (sequência negativa), que na verdade são contribuições da mesma harmônica. Nesse caso, as ordens das colunas onde ficam localizados estas duas contribuições guardam a seguinte relação:

$$l+l' = m.$$

Demonstra-se:

Seja uma máquina com  $m$  barras e  $p$  pares de pólos:

Seja  $n$  a sequência positiva da harmônica que ocorre na coluna  $l$  e  $g$ , o menor inteiro que satisfaz a relação  $np-1=gm$ .

Seja  $n'=-n$  a sequência negativa da mesma harmônica  $\Rightarrow$

Existe  $g'$  e  $l'$  t.q.  $n'p-l'=g'm$ .

Então,  $n'p-l'=-np-l' \Rightarrow n'p-l'=-gm-l-l'=g'm \Rightarrow l+l'=-(g+g')m$ .

Como  $l$  e  $l'$  são inteiros "não negativos" e menores que  $m \Rightarrow$

$g+g'$  só pode ser igual a  $-1$ . Então  $g'=g+1$  por isso  $l+l'=m$ .

Pode-se também demonstrar, como já foi feito para a máquina trifásica, que o número de colunas não nulas é:

$$r = \frac{gm}{2p}$$

Como a matriz  $L_{srp}$  só possui uma linha, os elementos correspondentes às harmônicas  $n=1, 3, 5, 7, \dots$  e seus simétricos, pertencem todos à mesma linha. Eles são distribuídos pelas colunas que variam de  $2p$  em  $2p$ , enquanto  $n$  varia de 2 em 2, satisfazendo a expressão  $np-l=gm$ .

Cada  $n$  corresponde a uma componente positiva ( $n$ ) e uma negativa ( $-n$ ) que estão posicionadas nas colunas  $l$  e  $l'$  de modo que:  $np-l=gm$ , para  $n$  positivo e  $l'=m-l$ , para o simétrico de  $n$ .

Como a harmônica  $n$ , nas expressões, aparece quase sempre acompanhada do número de par de polos  $p$ , pode-se usar, novamente, a variável  $\nu=np$  para indicar a ordem da harmônica.

Novamente, a coluna  $l=p$  pode ser usada como ponto de partida para determinar as outras colunas e suas harmônicas. Isto é, na coluna  $l=p$  a relação  $np-l=gm$  é satisfeita para  $n=1$  e  $g=0$ . Ou seja, a sequência positiva da harmônica  $n=1$  estará presente na coluna  $l=p$  e a sequência negativa, ou  $n=-1$ , estará presente na coluna  $l'=m-p$ . As demais colunas são determinadas somando-se  $2p$  (ou subtraindo-se) seguidamente às ordens das colunas já determinadas e quando  $l$  ultrapassa  $m-1$  (ou quando  $l$  fica negativo) subtrai-se (ou soma-se)  $m$ .

#### Exemplo V.1:

Máquina com número de barras  $m = 8$  e número de par de pólos  $p = 2$ .

$$r = \frac{gm}{2p} = \frac{g \times 8}{2 \times 2} = 2 \text{ para } g = 1 \Rightarrow r \text{ é um número par.}$$

$$\text{Harmônica fundamental } n=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \nu=+2 \text{ para } l=2 \\ \nu=-2 \text{ para } l'=m-l \Rightarrow l'=8-2=6 \end{cases}$$

Somando-se  $2p=4$  a  $l=2$ , tem-se  $l=6$ . Coluna já identificada.

Somando-se  $2p$  a  $l=6$ , tem-se  $l=10$  que ultrapassa  $m-1=7$ . Subtrai-se, então,  $m=8$  de  $l$ , dando  $l=2$ , retornando em ordem de coluna já identificada. Isto mostra que não há condições de identificar mais colunas pela adição de  $2p$  nas ordens de colunas identificadas.

Por outro lado, subtraindo-se  $2p=4$  de  $l=p=2$ , tem-se  $l=-2$  que é negativo e não representa ordem de coluna. Então, soma-se  $m=8$ , dando  $l=6$  que também é



ordem de coluna já identificada.

Desta forma, as únicas colunas não nulas na matriz  $L_{srp}$  são  $l=2$  e  $l=6$ .

Por simples verificação, faz-se  $n=\pm 3$ :

$$3^{\text{a}} \text{ harmônica} \quad n=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} \nu=+6 \text{ para } l=2+4=6 \\ \nu=-6 \text{ para } l'=6-2p \Rightarrow l'=6-4=2 \end{cases}$$

Como só as colunas 2 e 6 possuem elementos não nulos, só a fundamental pode ser representada.

Assim:

$$\begin{array}{c|c|c} l & 2 & 6 \\ n & +1 & -1 \\ \nu & +2 & -2 \end{array}$$

Exemplo V.2:

Máquina com número de barras  $m=28$  e número de par de pólos  $p=2$ .

$$r = \frac{g \times 28}{2 \times 2} = 7 \text{ e } g=1 \Rightarrow r \text{ é um número ímpar.}$$

Por soma de  $2p$  à  $l=p=2$ , identifica-se as colunas não nulas  $l=2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, \dots$

Quando ultrapassar  $m-1=27$ , subtrai-se  $m=28$ , obtendo-se  $l=26+4-28=2$  e retornando-se à ordem da primeira coluna identificada.

As harmônicas e as colunas, nesse caso, serão: Colunas: 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, ...

Harmônicas: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... Por subtração de  $2p$  à  $l=p=2$ , obtém-se  $l$  negativo. Soma-se  $m$ , encontrando-se  $l=(2-4)+28=26$  que é uma coluna já identificada.

Prosseguindo, subtraindo-se  $2p=4$ , tem-se todas as demais colunas já obtidas por soma de  $2p$ .

As harmônicas e as colunas, nesse caso, serão:

Colunas: 2, 26, 22, 18, 14, 10, 6, 2, ...

Harmônicas: 1, -1, -3, -5, -7, -9, -11, -13, ...

Tomando-se as componentes positivas e negativas de cada harmônica a partir de  $n=1$ , até preencher as posições não nulas da matriz, tem-se:

$$\begin{array}{l} \text{Colunas } l \\ \text{harmônica } n \\ \nu=np \end{array} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 14 & 18 & 22 & 26 & 2 & 6 & 10 & 14 \\ -7 & -5 & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ -14 & -10 & -6 & -2 & 2 & 6 & 10 & 14 \end{array}$$

Neste caso, as componentes da harmônica  $n=7$  ocorrem em uma mesma coluna, caracterizando uma problema nesta forma de representação. É fácil perceber que na máquina monofásica, toda vez que o número de colunas não nulas na matriz  $L_{srp}$  for ímpar, uma das harmônicas terá as duas sequências posicionadas na mesma coluna. Como não é possível considerar as duas sequências na mesma posição e, ao considerar-se apenas uma, o sistema ficaria assimétrico, opta-se por desprezar esta harmônica, zerando-se seu elemento de indutância na matriz.

### Exemplo V.3

Máquina com número de barras  $m = 24$  e número de par de pólos  $p = 2$ .

$$r = \frac{g \times 28}{2 \times 2} = 6 \text{ e } g = 1 \Rightarrow r \text{ é um número par.}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} l & 2 & 6 & 10 & 14 \\ n & 1 & 3 & 5 & 7 \\ v & 2 & 6 & 10 & 14 \end{array}, \text{ obtidos por somas de } 2p \text{ e}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} l & 14 & 18 & 22 \\ n & -5 & -3 & -1 \\ v & -10 & -6 & -2 \end{array}, \text{ obtidos por subtrações de } 2p.$$

Reorganizando:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} l & 14 & 18 & 22 & 2 & 6 & 10 \\ v & -10 & -6 & -2 & 2 & 6 & 10 \end{array}$$

É óbvio que no caso de  $r$  par não há ocorrência de duas sequências de uma mesma harmônica em uma mesma posição da matriz de mútuas.

Em todos os casos, ou as ordens das colunas são iguais às ordens das harmônicas  $v=np$ , ou são iguais a  $np \pm gm$ . No caso em que são iguais a  $v$ , elas também podem ser colocadas na forma  $np \pm gm$ , para  $g=0$ . Desta forma,  $l=np \pm gm$ , ou seja,  $l$  é o resto da divisão de  $np$  por  $m$ , ou melhor,  $l=np(\text{mod } m)$ .

### Colunas e elementos extremos:

Considerando-se a lei de formação, o elemento mais a direita na matriz corresponderá a uma harmônica de ordem  $v_d=p+a2p$  e o elemento mais a esquerda corresponderá a uma harmônica de ordem  $v_e=p-b2p$ , de tal forma que  $a+b+1 = r$ .

$$\text{Se } r \text{ é par} \Rightarrow a=b-1 \Rightarrow \begin{cases} a-b+1=0 \\ a+b+1=r \end{cases} \Rightarrow 2a=r-2 \Rightarrow a=\frac{r-2}{2} \text{ e } b=\frac{r}{2}$$

$$\Rightarrow v_e = p - b2p = p - \frac{2pr}{2} = p(1-r), \quad (V.21)$$

$$v_d = p + a2p = \frac{p+2p(r-2)}{2} = p(r-1), \quad (V.22)$$

$$l_e = p(1-r)(\text{Mod } m) \text{ e} \quad (V.23)$$

$$l_d = p(r-1)(\text{Mod } m) \quad (V.24)$$

$$\text{Se } r \text{ é ímpar} \Rightarrow a=b \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+b+1=r \end{cases} \Rightarrow a=\frac{r-1}{2} \text{ e } b=\frac{r-1}{2}$$

$$\Rightarrow v_e = p - b2p = p - \frac{2p(r-1)}{2} = p(2-r), \quad (V.25)$$

$$v_d = p + a2p = p + \frac{2p(r-1)}{2} = pr, \quad (V.26)$$

$$l_e = p(2-r)(\text{Mod } m) \text{ e} \quad (V.27)$$

$$l_d = pr(\text{Mod } m). \quad (V.28)$$

Com a determinação das colunas extremas e suas harmônicas, todas as colunas da matriz ficam mais claramente identificadas por:

Para  $r$  par:

$$l \in \left\{ p(1-r)(\text{Mod } m), p(3-r)(\text{Mod } m), p(5-r)(\text{Mod } m), \dots, -3p(\text{Mod } m), -p(\text{Mod } m), \right. \\ \left. p(\text{Mod } m), 3p(\text{Mod } m), \dots, (r-5)p(\text{Mod } m), (r-3)p(\text{Mod } m), (r-1)p(\text{Mod } m) \right\}$$

Para  $r$  ímpar:

$$l \in \left\{ p(2-r)(\text{Mod } m), p(4-r)(\text{Mod } m), p(6-r)(\text{Mod } m), \dots, -3p(\text{Mod } m), -p(\text{Mod } m), \right. \\ \left. p(\text{Mod } m), 3p(\text{Mod } m), \dots, (r-4)p(\text{Mod } m), (r-2)p(\text{Mod } m), pr(\text{Mod } m) \right\}$$

Os elementos da matriz  $L_{srp} = \mathcal{L}_{sr} B^{-1}$  também são facilmente identificados:

Para  $r$  par:

Coluna	Elemento	
$p(1-r)(\text{Mod } m)$	$\frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp}_{(1-r)p} e^{jp(1-r)\phi}$	
$p(3-r)(\text{Mod } m)$	$\frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp}_{(3-r)p} e^{jp(3-r)\phi}$	
$\vdots$	$\vdots$	
$-p(\text{Mod } m)$	$\frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp}_{-p} e^{-jp\phi}$	
$p(\text{Mod } m)$	$\frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp}_p e^{jp\phi}$	(V. 29)
$3p(\text{Mod } m)$	$\frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp}_{3p} e^{j3p\phi}$	
$\vdots$	$\vdots$	
$(r-3)p(\text{Mod } m)$	$\frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp}_{(r-3)p} e^{jp(r-3)\phi}$	
$(r-1)p(\text{Mod } m)$	$\frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp}_{(r-1)p} e^{jp(r-1)\phi}$	

Para  $r$  ímpar:

Coluna	Elemento	
$p(2-r)(\text{Mod } m)$	$\frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp}_{(2-r)p} e^{jp(2-r)\phi}$	
$p(4-r)(\text{Mod } m)$	$\frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp}_{(4-r)p} e^{jp(4-r)\phi}$	
$\vdots$	$\vdots$	
$-p(\text{Mod } m)$	$\frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp}_{-p} e^{-jp\phi}$	
$p(\text{Mod } m)$	$\frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp}_p e^{jp\phi}$	(V. 30)
$3p(\text{Mod } m)$	$\frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp}_{3p} e^{j3p\phi}$	
$\vdots$	$\vdots$	
$(r-2)p(\text{Mod } m)$	$\frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp}_{(r-2)p} e^{jp(r-2)\phi}$	
$rp(\text{Mod } m)$	0	

## Exemplo V.4:

Máquina com  $m = 8$  e  $p = 2 \Rightarrow r = 2$  e  $g = 1$ .

Apenas dois elementos e duas colunas:

$$v_e = p(1-r) = 2(1-2) = -2 \quad \text{e} \quad v_d = p(r-1) = 2(2-1) = 2 \Rightarrow$$

$$l_e = p(1-r)(\text{Mod } m) = -2(\text{Mod } 8) = 6 \Rightarrow \text{o elemento é } \frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp_{-2}} e^{-j2\phi} \quad \text{e}$$

$$l_d = p(r-1)(\text{Mod } m) = 2(\text{Mod } 8) = 2 \Rightarrow \text{o elemento é } \frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp_2} e^{j2\phi}.$$

## Exemplo V.5:

Máquina com  $m = 28$  e  $p = 2 \Rightarrow r = 7$  e  $g = 1$ .

Primeiro elemento e primeira coluna:

$$v_e = p(2-r) = 2(2-7) = -10 \Rightarrow l_e = -10(\text{Mod } 28) = 18 \quad \text{e}$$

$$v_d = pr = 2(7) = 14 \Rightarrow l_d = 14(\text{Mod } 28) = 14.$$

Para determinar as demais colunas, soma-se  $2p$  a  $l_e$ , seguidamente, até  $l_d$  ser atingido. Caso ultrapasse  $m-1=27$ , subtrai-se  $m=28$ , resultando o processo em: 18, 22, 26, 2, 6, 10, 14.

As harmônicas correspondentes são: -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14 e o elemento da coluna 14 (ordem de harmônica 14) será zerado porque só é possível representar uma das sequências.

## Exemplo V.6:

Máquina com  $m = 44$  e  $p = 4 \Rightarrow r = 11$  e  $g = 2 \Rightarrow$

$$v_e = 4(2-11) = -36 \Rightarrow l_e = -36(\text{Mod } 44) = 8 \quad \text{e}$$

$$v_d = 4(11) = 44 \Rightarrow l_d = 44(\text{Mod } 44) = 0.$$

Colunas: 8, 16, 24, 32, 40, 4, 12, 20, 28, 36, 0

Harmônicas: -36, -28, -20, -12, -4, 4, 12, 20, 28, 36, 44

O elemento da coluna 0 será zerado.

Uma vez identificada a matriz  $L_{srp}$ , demonstra-se que  $L_{srp}$  é igual a

$$L_{srp}^{t*}.$$

$$\mathbb{L}_{rsp} = B \mathbb{L}_{rsp} = B \mathbb{L}_{srp}^t = B \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \mathbb{L}_{srpn} \begin{bmatrix} \cos np\phi \\ \cos n(p\phi+p2\pi/m) \\ \cos n(p\phi+p4\pi/m) \\ \vdots \\ \cos n(p\phi+p(m-1)2\pi/m) \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (V.31)$$

$$\mathbb{L}_{rsp} = B \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{\mathbb{L}_{srpn}}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ b^{np} \\ b^{2np} \\ \vdots \\ b^{(m-1)np} \end{bmatrix} jnp\phi + \begin{bmatrix} 1 \\ b^{-np} \\ b^{-2np} \\ \vdots \\ b^{-(m-1)np} \end{bmatrix} e^{-jnp\phi} \right\} \Rightarrow \quad (V.32)$$

$$\mathbb{L}_{rsp} = B \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{\mathbb{L}_{srpn}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ b^{-np} \\ \vdots \\ b^{-np(m-1)} \end{bmatrix} e^{-jnp\phi} \Rightarrow \quad (V.33)$$

$$\mathbb{L}_{rsp} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{\mathbb{L}_{srpn}}{2\sqrt{m}} e^{-jnp\phi} \sum_{k=0}^{m-1} \begin{bmatrix} b^{-knp} \\ b^{-k(np-1)} \\ \vdots \\ b^{-k(np-(m-1))} \end{bmatrix} = \mathbb{L}_{srp}^{t*} \quad (V.34)$$

A expressão de  $\mathbb{L}_{srpn}$  em (V.7), quando usada nas expressões (V.17) e (V.34), não deve levar em conta a mudança de sinal de  $\nu$ , ou de  $n$ , nos somatórios porque ela foi definida para a harmônica  $n$  e não para as parcelas de sequências positivas e de sequências negativas de  $n$ . O somatório de  $-\infty$  a  $+\infty$  é um artifício de simplificação na representação da matriz  $\mathbb{L}_{srp}$ .

Para garantir, pode-se representar  $\mathbb{L}_{srpn}$  por:

$$\mathbb{L}_{srpn} = \frac{4 \mu_0 l R w_p}{\pi \delta n^2 p^2 F_{SM} K_c} K_{wp} |n| \sin \frac{|n| p \pi}{m} \quad (V.35)$$

Da mesma forma que na máquina trifásica, o sistema ficará reduzido

através da eliminação das equações que possuam soluções triviais nulas que são aquelas com indutâncias mútuas nulas entre estator e rotor. O sistema ficará representado por  $r+1$  equações e quando  $r$  for ímpar, um dos elementos da matriz de indutâncias mútuas será, forçadamente, zerado. É claro que esta equação também terá solução trivial nula, reduzindo a ordem do sistema para  $r$ .

O sistema de equações do motor monofásico expresso em variáveis de componentes simétricas e só com o enrolamento principal energizado pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} v_{sp} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sp} & \\ & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{sp} & L_{srp} \\ L_{rsp} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix}, \quad (V.36)$$

ou mais explicitamente:

$$\begin{bmatrix} v_{sp} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} R_{sp} & & & \\ & R_{r1(k)} & & \\ & & R_{r1(k)} & \\ & & & \ddots \\ & & & & R_{r1(k)} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{sp} & L_{srp1} & L_{srp2} & \dots & L_{srpr} \\ L_{srp1}^* & L_{r1(k)} & & & \\ L_{srp2}^* & & L_{r1(k)} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ L_{srpr}^* & & & & L_{r1(k)} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_{r1} \\ i_{r2} \\ \vdots \\ i_{r_r} \end{bmatrix}, \quad (V.37)$$

onde:  $R_{r1(k)} = 2r_a + C1(k)r_b$ , para  $k = 1, 2, \dots, r$

$$L_{r1(k)} = 2l_a + C1(k)l_b + mL_r,$$

$$L_{r0} = 2l_a \text{ para } i(k)=0$$

$$\text{e } L_{srp_{L(k)}} = \frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp_v} e^{j\nu\phi}, \quad (V.38)$$

sendo:  $C1(k) = 4\sin^2 i(k)\pi/m$ ,

$$mL_r = \frac{2\mu_0 \pi R l}{m \delta} e$$

$$i(k) = \nu(\text{Mod } m).$$

Para demonstrar que algumas das equações possuem soluções nulas, é só lembrar que a matriz  $L_{srp}$  só tem  $r$  colunas não nulas e por isso,  $L_{rsp}$  só terá  $r$  linhas não nulas, ficando as equações que envolvem estas linhas de  $L_{rsp}$  com o seguinte aspecto:

$$0 = R_r k i_k + \frac{d}{dt} L_r k i_k.$$

Se  $i_{r_k}(0) = 0$ , a solução para estas equações será  $i_{r_k}(t) = 0$ .

## V.2 Sistema a Coeficientes Constantes.

Como os elementos da matriz  $L_{rsp}$  e da matriz  $L_{rsp}$  são funções variantes no tempo, uma nova transformação será usada para se obter um sistema com matrizes de coeficientes constantes. O processo é semelhante ao que foi empregado na máquina trifásica e a transformação proposta só deverá modificar as variáveis do rotor. Assim, a transformação de variáveis fica definida pela multiplicação da matriz  $\begin{bmatrix} 1 \\ Tr \end{bmatrix}$  nos vetores de tensões e correntes do sistema de componentes simétricas, como mostrado a seguir:

$$\begin{bmatrix} v_{sp} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ Tr \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{sp} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (V.39)$$

$$\begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ Tr \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix}, \quad (V.40)$$

onde a matriz  $Tr$  apresenta a seguinte estrutura:

para  $r$  par,

$$Tr = \text{diag} \left[ e^{jp(1-r)\phi} \ e^{jp(3-r)\phi} \ \dots \ e^{-jp\phi} \ e^{jp\phi} \ e^{j3p\phi} \ \dots \ e^{jp(r-1)\phi} \right] \quad (V.41)$$

e para  $r$  ímpar,

$$Tr = \text{diag} \left[ e^{jp(2-r)\phi} \ e^{jp(4-r)\phi} \ \dots \ e^{-jp\phi} \ e^{jp\phi} \ e^{j3p\phi} \ \dots \ e^{jp(2-r)\phi} \ e^{jpr\phi} \right]. \quad (V.42)$$

As tensões do rotor são nulas no sistema original, no sistema de componentes simétricas e também no novo sistema:

$$[v_r] = B[u_r] = B[0] = [0] \quad (V.43)$$

$$\text{e } [u_r] = Tr[v_r] = [0] \quad (V.44)$$



A aplicação da transformação no sistema de equações é feita pela multiplicação de  $\begin{bmatrix} 1 & \\ & \text{Tr} \end{bmatrix}$  à esquerda da Equação (V.36) ou de (V.37) e, pela substituição do vetor de correntes pela relação de transformação inversa:

$$\begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \text{Tr}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix}. \quad (\text{V.45})$$

O sistema ficará com o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} v_{sp} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \text{Tr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{sp} & \\ & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & \text{Tr}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \\ & \text{Tr} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{sp} & L_{srp} \\ L_{rsp} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & \text{Tr}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix}. \quad (\text{V.46})$$

As operações envolvidas na Equação (V.46) não apresentam novidades em relação às que foram executadas no Capítulo IV para a máquina trifásica, permitindo que o sistema de equações fique representado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} v_{sp} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sp} & \\ & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} 0 & d/dt(L_{srp}\text{Tr}^{-1}) \\ \text{Tr}d/dt(L_{rsp}) & \text{Tr}L_{rr}d/dt(\text{Tr}^{-1}) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{sp} & L_{srp}\text{Tr}^{-1} \\ \text{Tr}L_{rsp} & L_{rr} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix} \quad (\text{V.47})$$

A matriz  $L_{srp}$  será representada como  $L_{srp} = M_{srp}\text{Tr}$ , onde:  
para  $r$  par,

$$M_{srp} = \frac{\sqrt{m}}{2} \begin{bmatrix} L_{srp}_{(1-r)p} & L_{srp}_{(3-r)} & \dots & L_{srp}_{-p} & L_{srp}_p & \dots & L_{srp}_{(r-3)p} & L_{srp}_{(r-1)p} \end{bmatrix} \quad (\text{V.48})$$

e para  $r$  ímpar,

$$M_{srp} = \frac{\sqrt{m}}{2} \begin{bmatrix} L_{srp}_{(2-r)p} & L_{srp}_{(4-r)} & \dots & L_{srp}_{-p} & L_{srp}_p & \dots & L_{srp}_{(r-2)p} & L_{srp}_{rp} \end{bmatrix} \quad (\text{V.49})$$

O sistema de equações resultante, após a substituição de  $L_{srp}$  por  $M_{srp}\text{Tr}$  efetuadas as operações pendentes na Equação (V.47), fica representado por:

$$\begin{bmatrix} v_{sp} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sp} & \\ & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -j\omega E_r M_{srp}^t & -j\omega E_r L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{sp} & M_{srp} \\ M_{rsp} & L_{rr} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix}, \quad (V.50)$$

onde as operações efetuadas de (V.47) para (V.50) podem ser justificadas da seguinte forma:

$$(1) L_{srp} Tr^{-1}$$

$$L_{srp} = M_{srp} Tr \Rightarrow L_{srp} Tr^{-1} = M_{srp} Tr Tr^{-1} = M_{srp} \quad (V.51)$$

$$(2) Tr L_{rsp}$$

$$\begin{aligned} L_{rsp} = L_{srp}^{t*} &\Rightarrow Tr L_{rsp} = Tr L_{srp}^{t*} = Tr (M_{srp} Tr)^{t*} \Rightarrow \\ Tr L_{rsp} &= Tr Tr^{-1} M_{srp}^t = M_{srp}^t = M_{rsp} \end{aligned} \quad (V.52)$$

$$(3) \frac{d}{dt} Tr^{-1} = -j\omega E_r Tr^{-1} \quad (V.53)$$

sendo:

$$\text{para } r \text{ par, } E_r = \text{diag} \begin{bmatrix} p(1-r) & p(3-r) & \dots & -p & p & 3p & \dots & p(r-3) & p(r-1) \end{bmatrix} \quad (V.54)$$

$$\text{e para } r \text{ ímpar, } E_r = \text{diag} \begin{bmatrix} p(2-r) & p(4-r) & \dots & -p & p & 3p & \dots & p(r-2) & pr \end{bmatrix} \quad (V.55)$$

$$(4) \frac{d}{dt} (L_{srp} Tr^{-1})$$

$$L_{srp} Tr^{-1} = M_{srp} \Rightarrow d/dt (L_{srp} Tr^{-1}) = d/dt M_{srp} = 0, \quad (V.56)$$

onde a derivada é zero porque  $M_{srp}$  só tem elementos invariantes no tempo.

$$(5) Tr \frac{d}{dt} (L_{rsp})$$

$$L_{rsp} = L_{srp}^{t*} = (M_{srp} Tr)^{t*} \Rightarrow Tr d/dt (L_{rsp}) = Tr d/dt (M_{srp} Tr)^{t*} \Rightarrow$$

$$Tr d/dt (L_{rsp}) = Tr d/dt (Tr^{-1} M_{srp}^t) \Rightarrow Tr (-j\omega E_r Tr^{-1}) M_{srp}^t \Rightarrow$$

$$Tr d/dt (L_{rsp}) = -j\omega E_r M_{srp}^t = -j\omega M_{rsp} \quad (V.57)$$

### Solução do sistema de equações:

A tensão aplicada aos terminais do estator é uma onda senoidal que pode ser escrita como a soma de dois fasores girantes de sequências simétricas, da seguinte forma:

$$v_{sp} = \sqrt{2} V_p \cos \omega t = \frac{\sqrt{2}}{2} V_p \left\{ e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} \right\}. \quad (V.58)$$

Além disso, as transformações de variáveis foram aplicadas somente nas variáveis do rotor, ou seja:

$$\hat{u}_{sp} = u_{sp} = v_{sp} \quad (V.59)$$

$$e \quad i_{sp} = i_{sp} = i_{sp}. \quad (V.60)$$

Assim,  $\hat{u}_{sp} = v_{sp} = \frac{\sqrt{2}}{2} V_p \left\{ e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} \right\}$  é a tensão aplicada em (V.50).

Cada parcela da tensão  $v_{sp}$  pode ser aplicada separadamente na Equação (V.50). Considerando-se somente a sequência positiva  $v_{sp}^+ = \frac{\sqrt{2}}{2} V_p e^{j\omega t}$ , ter-se-á a seguinte solução:

$$i_{sp}^+ = I_{sp}^+ e^{j\omega t} \quad (V.61)$$

$$e \quad [i_r^+] = [I_r^+] e^{j\omega t}, \quad (V.62)$$

onde:  $I_{sp}^+$  é o fasor de corrente do estator e  
 $[I_r^+]$  é o vetor de fasores de correntes do rotor.

Este resultado, apresentado nas Equações (V.61) e (V.62), pode ser verificado através de uma análise sobre o sistema de equações na forma apresentada em (V.50). Além disso, ele pode ser justificado por uma comparação com a interpretação física feita para os resultados obtidos no estudo da máquina trifásica. Percebe-se, facilmente, que na máquina trifásica havia uma interação, nas equações, entre as componentes de sequências positiva e negativa das correntes do estator. Enquanto na máquina monofásica as componentes de sequência não interagem entre si.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} V_p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sp} \\ R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{sp}^+ \\ I_r^+ \end{bmatrix} - j\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E_r M_{rsp} & E_r L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{sp}^+ \\ I_r^+ \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} L_{sp} & M_{srp} \\ M_{rsp} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{sp}^+ \\ I_r^+ \end{bmatrix} \quad (V.63)$$

Para aplicação da tensão de sequência negativa,  $v_{sp}^- = \frac{\sqrt{2}}{2} V_p e^{-j\omega t}$ , as correntes terão expressões análogas às de sequência positiva, mostradas em (V.61) e (V.62), ficando o sistema de equações com o seguinte aspecto:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} V_p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sp} \\ R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{sp}^- \\ I_r^- \end{bmatrix} - j\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E_r M_{rsp} & E_r L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{sp}^- \\ I_r^- \end{bmatrix} - j\omega \begin{bmatrix} L_{sp} & M_{srp} \\ M_{rsp} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{sp}^- \\ I_r^- \end{bmatrix}, \quad (V.64)$$

$$\text{onde: } i_{sp}^- = I_{sp}^- e^{-j\omega t} \quad e \quad (V.65)$$

$$[i_r^-] = [I_r^-] e^{-j\omega t} \quad (V.66)$$

Como o sistema é linear, a aplicação da tensão  $v_{sp} = \sqrt{2} V_p \cos \omega t$ , resultará em correntes iguais às somas das respectivas correntes de sequência positiva e negativa, mostradas em (V.61), (V.62), (V.65) e (V.66), então:

$$i_{sp} = i_{sp}^+ + i_{sp}^- = I_{sp}^+ e^{j\omega t} + I_{sp}^- e^{-j\omega t} \quad (V.67)$$

$$e \quad i_{r_k} = i_{r_k}^+ + i_{r_k}^- = I_{r_k}^+ e^{j\omega t} + I_{r_k}^- e^{-j\omega t}. \quad (V.68)$$

Para resolver os sistemas (V.63) e (V.64), as correntes são colocadas em evidência e as matrizes são adicionadas. A soma delas, em cada caso, é invertida e multiplicada pelo vetor de tensões correspondente, resultando nas seguintes equações:

Sequência positiva:

$$\begin{bmatrix} I_{sp}^+ \\ I_r^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sp} + j\omega L_{sp} & j\omega M_{srp} \\ j(\omega L_{sp} - \omega E_r) M_{rsp} & R_{rr} + j(\omega L_{rr} - \omega E_r) \end{bmatrix}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} V_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (V.69)$$

Sequência negativa:

$$\begin{bmatrix} I_{sp}^- \\ I_r^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sp} - j\omega L_{sp} & -j\omega M_{srp} \\ -j(\omega L_{sp} + \omega E_r) M_{rsp} & R_{rr} - j(\omega L_{rr} + \omega E_r) \end{bmatrix}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} V_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (V.70)$$

A matriz de sequência positiva é detalhada:

$$\begin{bmatrix} R_{sp} + j\omega_u L_{sp} & j\omega_u \frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp_{L(1)}} & j\omega_u \frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp_{L(2)}} & \dots & j\omega_u \frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp_{L(r)}} \\ j\omega_{1(1)} \frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp_{L(1)}} & j\omega_{1(1)} L_{1(1)} + R_{1(1)} & & & \\ j\omega_{1(2)} \frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp_{L(2)}} & & j\omega_{1(2)} L_{1(2)} + R_{1(2)} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ j\omega_{1(r)} \frac{\sqrt{m}}{2} L_{srp_{L(r)}} & & & & j\omega_{1(r)} L_{1(r)} + R_{1(r)} \end{bmatrix} \quad (V.71)$$

onde:  $\omega_{1(k)} = \omega_u - \omega_L(k)$ ,  
 $1(k) = L(k) \pmod{m}$  e  
 $L_{srp_{-v}} = L_{srp_v}$  (V.72)

sendo: para r par,

$$L(k) \in \{p(1-r), p(3-r), \dots, -p, p, 3p, \dots, p(r-3), p(r-1)\} \quad (V.73)$$

e para r ímpar,

$$L(k) \in \{p(2-r), p(4-r), \dots, -p, p, 3p, \dots, p(r-2), pr\}. \quad (V.74)$$

A corrente  $i_{sp}$  é a mesma corrente do sistema original, sendo, portanto, uma corrente real. Além disso, na Equação (V.67), ficou mostrado que  $i_{sp}$  só é formada por componentes de frequência fundamental. Dessa forma:

$$i_{sp} = i_{sp} = I_{sp} \cos(\omega u t + \theta_s) \quad (V.75)$$

e, como função das soluções de sequência positiva e negativa, ela pode ser representada por:

$$i_{sp} = I_{sp}^+ e^{j\omega u t} + I_{sp}^- e^{-j\omega u t}.$$

Pela igualdade das Equações (V.75) e (V.76), tem-se:

$$I_{sp}^- = I_{sp}^{+*}. \quad (V.76)$$

Substituindo-se  $I_{sp}^-$  por  $I_{sp}^{+*}$  em (V.67), tem-se:

$$i_{sp} = 2\operatorname{Re}\left\{I_{sp}^+ e^{j\omega t}\right\} = 2|I_{sp}^+|\cos(\omega t + \theta_s^+), \quad (\text{V.77})$$

$$\text{ficando } I_{sef} = \frac{I_{sp}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|I_{sp}^+|. \quad (\text{V.78})$$

As correntes  $i_{r_{1(k)}}$  podem ser transformadas para o sistema original pela aplicação das transformações inversas, como mostrado a seguir:

$$[i_r] = B^{-1}Tr^{-1}[i_r] \quad (\text{V.79})$$

Antes de efetuar o cálculo de  $Tr^{-1}[i_r]$ , é bom lembrar que as correntes no sistema de componentes simétricas mantêm, entre si, uma relação de conjugados, da forma mostrada abaixo:

Se  $r$  é par:

$$\begin{aligned} i_{r_{p(1-r)(\text{Mod } m)}} &= i_{r_{p(r-1)(\text{Mod } m)}}^* \\ i_{r_{p(3-r)(\text{Mod } m)}} &= i_{r_{p(r-3)(\text{Mod } m)}}^* \\ &\vdots \\ i_{r_{-p(\text{Mod } m)}} &= i_{r_{p(\text{Mod } m)}}^* \end{aligned} \quad (\text{V.80})$$

Se  $r$  é ímpar:

$$\begin{aligned} i_{r_{p(2-r)(\text{Mod } m)}} &= i_{r_{p(r-2)(\text{Mod } m)}}^*, \\ i_{r_{p(4-r)(\text{Mod } m)}} &= i_{r_{p(r-4)(\text{Mod } m)}}^*, \\ &\vdots \\ i_{r_{-p(\text{Mod } m)}} &= i_{r_{p(\text{Mod } m)}}^*, \\ \text{e } i_{r_{pr(\text{Mod } m)}} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V.81})$$

Os índices das correntes correspondem às ordens das colunas de  $M_{srp}$  que interagem com elas. A soma dos índices das correntes que mantêm a relação de conjugado é igual a  $m$ . Como observado nos Exemplos (V.5) e (V.6), os tais índices são as ordens das colunas onde estão posicionados os elementos de

$M_{srp}$  calculados pela mesma harmônica, sendo um de cada sequência. Ou seja, são as ordens de colunas  $l$  e  $l'$  tal que  $l+l'=m$ . Quando  $r$  é ímpar, a corrente da coluna de ordem  $pr(\text{Mod } m)$  deveria ser conjugado dela mesma. Ou seja, deveria ser real. Porém, como a indutância da coluna correspondente é zerada, esta corrente também terá solução nula.

Assim:

$$i_{r_{l(k)}} = i_{r_{m-l(k)}}^* \quad (V.82)$$

Esta relação de conjugados pode também ser demonstrada através de análise sobre a Equação (V.37), considerando-se que:

$$Rr_{l(k)} = Rr_{m-l(k)} \quad , \quad Lr_{l(k)} = Lr_{m-l(k)} \quad \text{e} \quad lsrp_{l(k)} = lsrp_{m-l(k)}^*$$

Quando estas correntes são obtidas por  $Tr^{-1}[i_r]$ , tem-se:

para  $r$  par,

$$[i_r] = \text{diag}[e^{-jp(1-r)\phi} \quad e^{-jp(3-r)\phi} \quad \dots \quad e^{jp\phi} \quad e^{-jp\phi} \quad \dots \quad e^{-jp(r-3)\phi} \quad e^{-jp(r-1)\phi}][i_r] \quad (V.83)$$

e para  $r$  ímpar,

$$[i_r] = \text{diag}[e^{-jp(2-r)\phi} \quad e^{-jp(4-r)\phi} \quad \dots \quad e^{jp\phi} \quad e^{-jp\phi} \quad \dots \quad e^{-jp(r-2)\phi} \quad e^{-jp\phi}][i_r] \quad (V.84)$$

$$\text{Como } i_{r_{l(k)}} = Ir_{l(k)}^+ e^{j\omega t} + Ir_{l(k)}^- e^{-j\omega t} \Rightarrow \quad (V.85)$$

$$i_{r_{l(k)}} = Ir_{l(k)}^+ e^{j(\omega t - L(k)\phi)} + Ir_{l(k)}^- e^{-j(\omega t + L(k)\phi)} \quad (V.86)$$

Retornando-se às relações apresentadas em (V.80) e (V.81) com as correntes de componentes simétricas expressas na forma da Equação (V.86), tem-se:

para  $r$  par,

$$Ir_{p(1-r)(\text{Mod } m)}^+ e^{j(\omega t - p(1-r)\phi)} + Ir_{p(1-r)(\text{Mod } m)}^- e^{-j(\omega t + p(1-r)\phi)} =$$

$$\left\{ Ir_{p(r-1)(\text{Mod } m)}^+ e^{j(\omega t - p(r-1)\phi)} + Ir_{p(r-1)(\text{Mod } m)}^- e^{-j(\omega t + p(r-1)\phi)} \right\}^*$$

$$Ir_{p(3-r)(\text{Mod } m)}^+ e^{j(wut-p(3-r)\phi)} + Ir_{p(3-r)(\text{Mod } m)}^- e^{-j(wut+p(3-r)\phi)} =$$

$$\left\{ Ir_{p(r-3)(\text{Mod } m)}^+ e^{j(wut-p(r-3)\phi)} + Ir_{p(r-3)(\text{Mod } m)}^- e^{-j(wut+p(r-3)\phi)} \right\}^*$$

e assim sucessivamente, até

$$Ir_{-p(\text{Mod } m)}^+ e^{j(wut+p\phi)} + Ir_{-p(\text{Mod } m)}^- e^{-j(wut-p\phi)} =$$

$$\left\{ Ir_{p(\text{Mod } m)}^+ e^{j(wut-p\phi)} + Ir_{p(\text{Mod } m)}^- e^{-j(wut+p\phi)} \right\}^*.$$

(V.87)

e para r ímpar,

$$Ir_{p(2-r)(\text{Mod } m)}^+ e^{j(wut-p(2-r)\phi)} + Ir_{p(2-r)(\text{Mod } m)}^- e^{-j(wut+p(2-r)\phi)} =$$

$$\left\{ Ir_{p(r-2)(\text{Mod } m)}^+ e^{j(wut-p(r-2)\phi)} + Ir_{p(r-2)(\text{Mod } m)}^- e^{-j(wut+p(r-2)\phi)} \right\}^*,$$

$$Ir_{p(4-r)(\text{Mod } m)}^+ e^{j(wut-p(4-r)\phi)} + Ir_{p(4-r)(\text{Mod } m)}^- e^{-j(wut+p(4-r)\phi)} =$$

$$\left\{ Ir_{p(r-4)(\text{Mod } m)}^+ e^{j(wut-p(r-4)\phi)} + Ir_{p(r-4)(\text{Mod } m)}^- e^{-j(wut+p(r-4)\phi)} \right\}^*,$$

e assim sucessivamente, até:

$$Ir_{-p(\text{Mod } m)}^+ e^{j(wut+p\phi)} + Ir_{-p(\text{Mod } m)}^- e^{-j(wut-p\phi)} =$$

$$\left\{ Ir_{p(\text{Mod } m)}^+ e^{j(wut-p\phi)} + Ir_{p(\text{Mod } m)}^- e^{-j(wut+p\phi)} \right\}^* e$$

$$Ir_{pr(\text{Mod } m)}^+ = Ir_{pr(\text{Mod } m)}^- = 0$$

(V.88)



Das relações (V.87) e (V.88), retira-se o importante resultado, mostrado abaixo:

para  $r$  par,

$$Ir_{p(1-r)(\text{Mod } m)}^+ = Ir_{p(r-1)(\text{Mod } m)}^{-*},$$

$$Ir_{p(1-r)(\text{Mod } m)}^- = Ir_{p(r-1)(\text{Mod } m)}^{+*},$$

$$Ir_{p(3-r)(\text{Mod } m)}^+ = Ir_{p(r-3)(\text{Mod } m)}^{-*},$$

$$Ir_{p(3-r)(\text{Mod } m)}^- = Ir_{p(r-3)(\text{Mod } m)}^{+*},$$

(V.89)

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ Ir_{-p(\text{Mod } m)}^+ & = & Ir_{p(\text{Mod } m)}^{-*}, \end{array}$$

$$Ir_{-p(\text{Mod } m)}^- = Ir_{p(\text{Mod } m)}^{+*},$$

e para  $r$  ímpar,

$$Ir_{p(2-r)(\text{Mod } m)}^+ = Ir_{p(r-2)(\text{Mod } m)}^{-*},$$

$$Ir_{p(2-r)(\text{Mod } m)}^- = Ir_{p(r-2)(\text{Mod } m)}^{+*},$$

$$Ir_{p(4-r)(\text{Mod } m)}^+ = Ir_{p(r-4)(\text{Mod } m)}^{-*},$$

$$Ir_{p(4-r)(\text{Mod } m)}^- = Ir_{p(r-4)(\text{Mod } m)}^{+*},$$

(V.90)

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ Ir_{-p(\text{Mod } m)}^+ & = & Ir_{p(\text{Mod } m)}^{-*}, \end{array}$$

$$Ir_{-p(\text{Mod } m)}^- = Ir_{p(\text{Mod } m)}^{+*},$$

Ou seja, a solução do sistema de equações (V.50) pode ser encontrada pela solução apenas da equação (V.63), em sequência positiva, sendo a solução total da corrente dada por:

$$i_{r_{1(k)}} = I_{r_{1(k)}}^+ e^{j\omega t} + I_{m-1(k)}^{+*} e^{-j\omega t}, \quad (V.91)$$

onde  $1(k)$  segue a enumeração das colunas não nulas da matriz  $L_{srp}$  apresentada na formação da matriz  $L_{srp}$ , como proposto em (V.72), (V.73) e (V.74).

No sistema de componentes simétricas:

$$i_{r_{1(k)}} = I_{r_{1(k)}}^+ e^{j(\omega t - L(k)\phi)} + I_{m-1(k)}^{+*} e^{-j(\omega t + L(k)\phi)}, \quad (V.92)$$

Para voltar ao sistema original as correntes de componentes simétricas  $[i_r]$  devem ser multiplicadas por  $B^{-1}$ .

Como  $[i_r]$ , no sistema original, possui  $m$  elementos, o vetor  $[i_r]$  deve ser preenchido com zeros nas linhas não definidas nos sistemas de componentes simétricas e a coeficientes constantes.

Assim:

$$i_{r_j} = 1/\sqrt{m} \sum_{k=1}^r i_{r_{1(k)}} b^{-(j-1)1(k)}, \text{ para } j=1, 2, \dots, m \quad (V.93)$$

Se  $1(k')=m-1(k) \Rightarrow i_{r_{1(k)}} \text{ e } i_{r_{1(k')}} \text{ são conjugados entre si e } b^{-(j-1)1(k')}$   
e  $b^{-(j-1)1(k')}$  também são conjugados entre si, resultando em:

$$i_{r_j} = \sum_{k=1}^r \frac{2}{\sqrt{m}} |I_{r_{1(k)}}^+| \cos(\omega t - L(k)\phi + \theta_{1(k)}^+ - (j-1)1(k)2\pi/m), \quad (V.94)$$

onde:  $\theta_{1(k)}^+$  é o ângulo de  $I_{r_{1(k)}}^+$ .

Com isso, o valor eficaz da corrente nos enrolamentos do rotor será:

$$I_{ref_j} = \frac{\sqrt{2}}{m} \left\{ \sum_{k=1}^r |I_{r_{1(k)}}^+|^2 \right\}^{1/2} \quad (V.95)$$

Cálculo do conjugado:

$$T_e = l_{sp}^{t*} \frac{\partial}{\partial \phi} \ell_{srp} \ell_r = l_{sp}^* \frac{\partial}{\partial \phi} (L_{sr} B) \ell_r \Rightarrow \quad (V.96)$$

$$T_e = l_{sp}^* \frac{\partial}{\partial \phi} (L_{sr} B) \ell_r = l_{sp}^* \frac{\partial}{\partial \phi} L_{sr} i_r \Rightarrow \quad (V.97)$$

$$T_e = l_{sp}^* \frac{\partial}{\partial \phi} (M_{srp} T_r) i_r = l_{sp}^* M_{srp} \frac{\partial}{\partial \phi} T_r i_r \Rightarrow \quad (V.98)$$

$$T_e = l_{sp}^* M_{srp} (j E_r) T_r i_r = j l_{sp}^* M_{srp} E_r i_r \Rightarrow \quad (V.99)$$

$$T_e = j l_{sp}^* M T i_r = j \left\{ I_{sp}^+ e^{j\omega t} + I_{sp}^- e^{-j\omega t} \right\}^* M T \left\{ [I_r^+] e^{j\omega t} + [I_r^-] e^{-j\omega t} \right\} \Rightarrow \quad (V.100)$$

$$T_e = j \left\{ I_{sp}^{+*} M T [I_r^+] + I_{sp}^{+*} M T [I_r^-] e^{-j2\omega t} + I_{sp}^{-*} M T [I_r^+] e^{j2\omega t} + \right. \\ \left. I_{sp}^{-*} M T [I_r^-] \right\}, \quad (V.101)$$

onde:

$$M T = \frac{\sqrt{m}}{2} \left[ \dots, -10L_{srp_{10}}, -6L_{srp_6}, -2L_{srp_2}, 2L_{srp_2}, 6L_{srp_6}, 10L_{srp_{10}}, \dots \right], \quad (V.102)$$

sendo que, para  $r$  ímpar, o último elemento da direita é nulo, de acordo com a Equação (V.30).

O conjugado médio será:

$$T_{ea} = j \left\{ I_{sp}^{+*} M T [I_r^+] + I_{sp}^{-*} M T [I_r^-] \right\} \Rightarrow \quad (V.103)$$

$$T_{ea} = j \left\{ I_{sp}^{+*} \frac{\sqrt{m}}{2} \sum_{k=1}^r L(k) L_{srp_{L(k)}} I_{r_{1(k)}}^+ + I_{sp}^{-*} \frac{\sqrt{m}}{2} \sum_{k=1}^r L(k) L_{srp_{L(k)}} I_{r_{1(k)}}^- \right\} \quad (V.104)$$

Como  $Ir_{1(k')}^- = Ir_{1(k)}^{+*}$ , para  $k'$  tal que:  $L(k') = -L(k)$ ,  $l(k') = m-l(k)$ ,

$$Lsrp_{L(k')} = Lsrp_{L(k)} \quad e \quad Isp^+ = Isp^{-*} \Rightarrow$$

$$Isp^{-*} \frac{\sqrt{m}}{2} \sum_{k=1}^r L(k) Lsrp_{L(k)} Ir_{1(k)}^- = - \left\{ Isp^{+*} \frac{\sqrt{m}}{2} \sum_{k=1}^r L(k) Lsrp_{L(k)} Ir_{1(k)}^+ \right\}^* \Rightarrow$$

$$Tea = j \frac{\sqrt{m}}{2} \left\{ Isp^{+*} \sum_{k=1}^r L(k) Lsrp_{L(k)} Ir_{1(k)}^+ - Isp^+ \sum_{k=1}^r L(k) Lsrp_{L(k)} Ir_{1(k)}^{+*} \right\} \Rightarrow \quad (V.105)$$

$$Tea = -2Im \left\{ Isp^{+*} MT [Ir^+] \right\} = -\sqrt{m} Im \left\{ Isp^{+*} \sum_{k=1}^r L(k) Lsrp_{L(k)} Ir_{1(k)}^+ \right\} \quad (V.106)$$

Exemplo V.7:

Máquina com 28 barras e 2 par de pólos.

$$r = \frac{g \times 28}{2 \times 2} \Rightarrow g = 1 \text{ e } r = 7 \Rightarrow r \text{ é ímpar } \Rightarrow$$

Colunas:      | 18 | 22 | 26 | 2 | 6 | 10 | 14 |

Harmônicas: | -10 | -6 | -2 | 2 | 6 | 10 | 14 |

$$Tr = \text{diag} [e^{-j10\phi} \ e^{-j6\phi} \ e^{-j2\phi} \ e^{j2\phi} \ e^{j6\phi} \ e^{j10\phi} \ e^{j14\phi}]$$

$$Er = \text{diag}[-10 \ -6 \ -2 \ 2 \ 6 \ 10 \ 14]$$

$$[Rss]_{1 \times 1} = Rsp, \quad [Lss]_{1 \times 1} = Lsp = lsdp + \sum_{n=1}^7 \frac{4 \mu_0 l R}{\pi \delta} \left( \frac{w_p K_{wpn}}{p n} \right)^2 \text{ ou}$$

$$lsdp + \frac{4 \mu_0 l R w_p^2}{\pi \delta} \left\{ \frac{2K_{wp7}^2}{196} + \frac{2K_{wp5}^2}{100} + \frac{2K_{wp3}^2}{36} + \frac{2K_{wp1}^2}{4} \right\}$$

$$Rrr = \text{diag}[2ra+3, 24rb \quad 2ra+1, 56rb \quad 2ra+0, 20rb \quad 2ra+0, 20rb \quad 2ra+1, 56rb \\ 2ra+3, 24rb \quad 2ra+4rb]$$

$$L_{rr} = \text{diag}[21a+3, 241b+Lr \quad 21a+1, 561b+Lr \quad 21a+0, 201b+Lr \quad 21a+0, 201b+Lr \\ 21a+1, 561b+Lr \quad 21a+3, 241b+Lr \quad 21a+41b+Lr]$$

$$M_{srp} = \sqrt{28}/2 \begin{bmatrix} L_{srp_{-10}} & L_{srp_{-6}} & L_{srp_{-2}} & L_{srp_2} & L_{srp_6} & L_{srp_{10}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{rsp} = M_{srp}^t \quad e$$

$$L_{srp_v} = \frac{4 \mu_0 l R w_p K_{wpn}}{\pi \delta v^2 F_{SM} K_c} \text{sen } \frac{v\pi}{28}.$$

Sistema de Equações:

$$(1) \sqrt{2}/2V_p = (R_{sp} \pm j\omega L_{sp}) I_{sp}^{\pm} \pm j\omega \sqrt{28}/2 \left\{ L_{srp_{10}} I_{r_{18}}^{\pm} + L_{srp_6} I_{r_{22}}^{\pm} + L_{srp_2} I_{r_{26}}^{\pm} + \right. \\ \left. L_{srp_2} I_{r_2}^{\pm} + L_{srp_6} I_{r_6}^{\pm} + L_{srp_{10}} I_{r_{10}}^{\pm} + 0 \right\}$$

$$(2) 0 = j(10\omega \pm \omega_u) \sqrt{7} L_{srp_{10}} I_{sp}^{\pm} + \left\{ (2ra+3, 24rb) + j(10\omega \pm \omega_u)(21a+3, 241b+Lr) \right\} I_{r_{18}}^{\pm}$$

$$(3) 0 = j(6\omega \pm \omega_u) \sqrt{7} L_{srp_6} I_{sp}^{\pm} + \left\{ (2ra+1, 56rb) + j(6\omega \pm \omega_u)(21a+1, 561b+Lr) \right\} I_{r_{22}}^{\pm}$$

$$(4) 0 = j(2\omega \pm \omega_u) \sqrt{7} L_{srp_2} I_{sp}^{\pm} + \left\{ (2ra+0, 20rb) + j(2\omega \pm \omega_u)(21a+0, 201b+Lr) \right\} I_{r_{26}}^{\pm}$$

$$(5) 0 = j(-2\omega \pm \omega_u) \sqrt{7} L_{srp_2} I_{sp}^{\pm} + \left\{ (2ra+0, 20rb) + j(-2\omega \pm \omega_u)(21a+0, 201b+Lr) \right\} I_{r_2}^{\pm}$$

$$(6) 0 = j(-6\omega \pm \omega_u) \sqrt{7} L_{srp_6} I_{sp}^{\pm} + \left\{ (2ra+1, 56rb) + j(-6\omega \pm \omega_u)(21a+1, 561b+Lr) \right\} I_{r_6}^{\pm}$$

$$(7) 0 = j(-10\omega \pm \omega_u) \sqrt{7} L_{srp_{10}} I_{sp}^{\pm} + \left\{ (2ra+3, 24rb) + j(-10\omega \pm \omega_u)(21a+3, 241b+Lr) \right\} I_{r_{10}}^{\pm}$$

$$(8) 0 = j(-14\omega \pm \omega_u) \sqrt{7} (0) I_{sp}^{\pm} + \left\{ (2ra+4rb) + j(-14\omega \pm \omega_u)(21a+41b+Lr) \right\} I_{r_{14}}^{\pm}$$

É fácil ver agora que se  $I_{sp}^+ = I_{sp}^{-*}$ , a solução da equação (2) em sequência positiva será igual ao conjugado da solução da equação (7) em sequência negativa. Com isso a relação  $I_{r_{18}}^+ = I_{r_{10}}^{-*}$  pode ser visualizada de

forma mais clara.

O mesmo pode ser dito e conferido para  $Ir_{22}^+ = Ir_8^{-*}$ ,  $Ir_{26}^+ = Ir_2^{-*}$ ,  $Ir_2^+ = Ir_{26}^{-*}$ ,  $Ir_6^+ = Ir_{22}^{-*}$  e  $Ir_{10}^+ = Ir_{18}^{-*}$ , não esquecendo que  $Ir_{14}^+ = Ir_{14}^{-*} = 0$

Equação do conjugado médio:

$$MT = M_{srp} E_r =$$

$$\sqrt{28}/2 \begin{bmatrix} Lsrp_{10} & Lsrp_8 & Lsrp_2 & Lsrp_2 & Lsrp_8 & Lsrp_{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & & & & & & \\ & -6 & & & & & \\ & & -2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 6 & & \\ & & & & & 10 & \\ & & & & & & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$MT = \sqrt{7} \begin{bmatrix} -10Lsrp_{10} & -6Lsrp_8 & -2Lsrp_2 & 2Lsrp_2 & 6Lsrp_8 & 10Lsrp_{10} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(10) Te = jI_{sp}^* MT \dot{I}_r =$$

$$j\sqrt{7}I_{sp}^* \left\{ -10Lsrp_{10} \dot{I}_{r_{18}} - 6Lsrp_8 \dot{I}_{r_{22}} - 2Lsrp_2 \dot{I}_{r_{26}} + 2Lsrp_2 \dot{I}_{r_2} + 6Lsrp_8 \dot{I}_{r_6} + 10Lsrp_{10} \dot{I}_{r_{10}} \right\}$$

$$\text{Como } \dot{I}_{r_{1(k)}} = Ir_{1(k)}^+ e^{j\omega t} + Ir_{m-1(k)}^{+*} e^{-j\omega t} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (11) Te = j\sqrt{7}I_{sp}^* & \left\{ -10Lsrp_{10} Ir_{18}^+ e^{j\omega t} - 10Lsrp_{10} Ir_{10}^{+*} e^{-j\omega t} - 6Lsrp_8 Ir_{22}^+ e^{j\omega t} \right. \\ & - 6Lsrp_8 Ir_8^{+*} e^{-j\omega t} - 2Lsrp_2 Ir_{26}^+ e^{j\omega t} - 2Lsrp_2 Ir_2^{+*} e^{-j\omega t} + 2Lsrp_2 Ir_2^+ e^{j\omega t} \\ & + 2Lsrp_2 Ir_{26}^{+*} e^{-j\omega t} + 6Lsrp_8 Ir_8^+ e^{j\omega t} + 6Lsrp_8 Ir_{22}^{+*} e^{-j\omega t} + 10Lsrp_{10} Ir_{10}^+ e^{j\omega t} \\ & \left. + 10Lsrp_{10} Ir_{18}^{+*} e^{-j\omega t} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(12) Te = -\sqrt{7}I_{sp}^* \left\{ (-20Lsrp_{10} |Ir_{18}^+| \sin(\omega t + \theta_{18}) - 12Lsrp_8 |Ir_{22}^+| \sin(\omega t + \theta_{22})) \right.$$

$$\begin{aligned}
& - 4Lsrp_2 |Ir_{28}^+| \sin(\omega t + \theta_{26}) + 4Lsrp_2 |Ir_2^+| \sin(\omega t + \theta_2) + 12Lsrp_8 |Ir_8^+| \sin(\omega t + \theta_8) \\
& + 20Lsrp_{10} |Ir_{10}^+| \sin(\omega t + \theta_{10}) \}
\end{aligned}$$

Calculando agora pela Equação (V.106), tem-se:

$$(13) \text{ Tea} = -2Im \left\{ Isp^{+*} \text{ MT } [Ir^+] \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\text{Tea} = -2Im \left\{ |Isp^+| e^{-j\theta_s} \sqrt{7} \begin{bmatrix} -10Lsrp_{10} & -6Lsrp_8 & -2Lsrp_2 & 2Lsrp_2 \\ 6Lsrp_8 & 10Lsrp_{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ir_{18}^+ & Ir_{22}^+ & Ir_{28}^+ & Ir_2^+ & Ir_8^+ & Ir_{10}^+ & Ir_{14}^+ \end{bmatrix}^t \right\} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(14) \text{ Tea} = -2\sqrt{7} |Isp^+| Im \left\{ e^{-j\theta_s} \begin{bmatrix} -10Lsrp_{10} Ir_{18}^+ - 6Lsrp_8 Ir_{22}^+ - 2Lsrp_2 Ir_{28}^+ + \\ 2Lsrp_2 Ir_2^+ + 6Lsrp_8 Ir_8^+ + 10Lsrp_{10} Ir_{10}^+ \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(15) \text{ Tea} = -2\sqrt{7} |Isp^+| \left\{ -10Lsrp_{10} |Ir_{18}^+| \sin(\theta_{18}^+ - \theta_s) - 6Lsrp_8 |Ir_{22}^+| \sin(\theta_{22}^+ - \theta_s) \right. \\
- 2Lsrp_2 |Ir_{28}^+| \sin(\theta_{28}^+ - \theta_s) + 2Lsrp_2 |Ir_2^+| \sin(\theta_2^+ - \theta_s) + 6Lsrp_8 |Ir_8^+| \sin(\theta_8^+ - \theta_s) \\
\left. + 10Lsrp_{10} |Ir_{10}^+| \sin(\theta_{10}^+ - \theta_s) \right\}
\end{aligned}$$

Substituindo-se, na expressão (12),  $isp^*$  por  $2|Isp^+| \cos(\omega t + \theta_s)$ ,  $\cos(\omega t + \theta_s) \sin(\omega t + \theta_v)$  por  $\frac{1}{2} \left\{ \sin[2\omega t + \theta_s + \theta_v] + \sin[\theta_v - \theta_s] \right\}$  e lembrando, ainda, que para o cálculo de conjugado médio, os termos periódicos devem ser anulados, tais como  $\sin(\omega t + \theta_s + \theta_v)$ , ter-se-á por (12) a mesma expressão encontrada em (15).

### V.3 Interpretação Física das Transformações

Os enrolamentos principais da máquina monofásica são ligados em série ou em paralelo, ficando reunidos em apenas um conjunto que é alimentado por uma tensão senoidal. Os condutores desses enrolamentos são distribuídos no estator, ficando suas bobinas dispostas de forma concêntrica. Suas bobinas podem ser ainda divididas em grupos para possibilitar o arranjo da formação dos pólos e para permitir alternativas de alimentação por mais de um nível de tensão. Dessa forma, para cada par de pólos formado, somente um campo pulsante é estabelecido no entreferro da máquina, sendo impossível a formação de um campo girante resultante. Por este motivo é que se utiliza um dispositivo auxiliar para partida, como o enrolamento auxiliar com capacitor de partida da máquina monofásica considerada neste trabalho.

Da mesma forma que na máquina trifásica, cada tensão senoidal aplicada está relacionada a um campo pulsante e carrega na sua função matemática as informações deste campo e de campos girantes componentes. Como um campo pulsante é igual à soma de dois campos girantes e a tensão senoidal também pode ser decomposta em dois fasores girantes (de sequência positiva e de sequência negativa), as componentes de mesma sequência, da tensão e do campo girante, estarão diretamente associadas. Após a partida da máquina, promovida com a ajuda do dispositivo auxiliar de partida, um dos campos girantes tende a manter a máquina girando no sentido da partida e o outro campo continua existindo, agindo ciclicamente, reforçando ou atenuando o primeiro campo.

Semelhantemente à máquina trifásica, uma corrente senoidal fluindo em um enrolamento do estator formará uma onda de força magnetomotriz pulsante, composta de termo fundamental e mais uma série infinita de harmônicas, onde cada componente harmônica pulsante também será composta por duas ondas de forças magnetomotrizes girantes e conjugadas (mesma intensidade e giros contrários ou, de sequência positiva e de sequência negativa). São componentes harmônicas de campo girante idênticas às da máquina trifásica. A diferença, neste caso, é que para cada ordem harmônica corresponderá duas componentes conjugadas (ou simétricas) de campo girante e, ambas induzirão forças eletromotrizes no rotor. Com isso, cada frequência produzida no rotor da máquina trifásica corresponderá a duas no rotor da máquina monofásica.

Os dois campos girantes correspondentes a uma determinada harmônica  $n$  giram, em relação ao estator, com velocidades iguais a  $+\frac{\omega u}{np}$  (rd mecânicos/s) e  $-\frac{\omega u}{np}$  (rd mecânicos/s), girando, respectivamente, em relação ao rotor, com velocidades iguais a  $+\frac{\omega u}{np} - \omega$  (rd mecânicos/s) e  $-\frac{\omega u}{np} - \omega$  (rd mecânicos/s).



Consequentemente, os enlaces de fluxo estabelecidos com os enrolamentos do rotor, produzirão componentes de tensão e corrente nas barras com frequências  $+u_{su} - np\omega$  (rd/s) e  $-u_{su} - np\omega$  (rd/s). A conclusão é que os fenômenos ocorridos são os mesmos da máquina trifásica.

O ângulo de uma volta para cada componente de campo girante do estator e o número de pólos formados por esta componente são calculados da mesma forma que na máquina trifásica. Entretanto, uma diferença importante a ser observada é que cada harmônica do estator formará dois sistemas polifásicos no rotor. Ou melhor, as duas componentes de campo girante derivadas da harmônica  $n$  de força magnetomotriz produzem correntes nos enrolamentos do rotor com frequências  $+u_{su} - np\omega$  (rd/s) e  $-u_{su} - np\omega$  (rd/s), cujas distribuições de ângulos de fases são simétricas. A Tabela IV.1, de distribuição de ângulos de fase na máquina trifásica, pode ser alterada para corresponder às distribuições da máquina monofásica, acrescentando-se uma coluna com ângulos simétricos aos da coluna existente de cada ordem harmônica.

A relação,  $n \pm n' = 2r$ , mantida entre duas harmônicas  $n$  e  $n'$  que estabelecem distribuições de ângulos de fases iguais ou simétricas nos condutores rotor, observada na máquina trifásica, continua sendo válida. Esta relação pode ser comprovada por análise feita sobre as mesmas componentes de correntes dos condutores do rotor, formadas pelos campos girantes do estator das harmônicas  $n$  e  $n'$ , que já existiam na máquina trifásica e, também, pode ser estabelecida por análise sobre as outras componentes de correntes, formadas pelos outros dois campos girantes conjugados, que existem agora na máquina monofásica.

Desta forma, se  $n$  e  $n'$  são ordens harmônicas de um grupo de distribuições de ângulos de fases das correntes do rotor iguais ou simétricos, onde  $n'$  é a menor ordem deste grupo, os dois sistemas polifásicos formados pelas componentes de campos girantes do estator com ordem  $n$  serão componentes de correntes do rotor com frequências  $+u_{su} - np\omega$  (rd/s) e  $-u_{su} - np\omega$  (rd/s). Os campos de reação formados por estas correntes do rotor terão velocidades, em relação ao rotor, iguais a  $\pm \frac{u_{su} - np\omega}{n'p}$  e  $\mp \frac{u_{su} + np\omega}{n'p}$ , em (rd mecânicos/s), ficando suas velocidades em relação ao estator iguais a  $\pm \frac{u_{su}}{n'p} + \frac{(n' \mp n)\omega}{n'}$  e  $\mp \frac{u_{su}}{n'p} + \frac{(n' \mp n)\omega}{n'}$ , em (rd mecânicos/s). Esses campos de reação do rotor produzirão tensões e correntes no estator com frequências dadas pela mesma expressão obtida para a máquina trifásica,  $\pm u_{su} + gm\omega$  (rd/s).

Em relação aos demais sistemas de variáveis, mantém-se toda a análise apresentada para a máquina trifásica. Continuam válidas, para as variáveis do

rotor, as interpretações de separação das contribuições de campos girantes apresentada para a transformação em variáveis de componentes simétricas e as interpretações de mudanças de referências para eixos móveis, estabelecida pela transformação em coeficientes constantes. A grande diferença fica por conta da limitação de componentes harmônicas, estabelecida após a transformação em componentes simétricas. Como o sistema de variáveis do estator não pode ser separado em variáveis de sequência positiva e negativa, a representação de ordens harmônicas fica restrita em um número igual a  $r/2$  ou  $(r-1)/2$ . Devido a isto, a corrente do estator só ficará representada por componentes de campo girante com frequência fundamental, omitindo-se o termo de frequência  $\pm \omega_r \pm g m \omega_s$  (rd/s).

#### V.4 Estudo do Regime Transitório

A máquina de indução em seu uso corrente opera em regime permanente, com velocidade constante, exceto em algumas aplicações com carga variável. Nestes casos, a mudança de carga conduzirá, também, à mudanças nos valores de corrente, velocidade, conjugado e potência em relação à condição de trabalho anterior. É claro que estas grandezas, para variarem entre os valores mantidos nas duas condições de carregamento, devem passar por uma situação transitória. Seus valores deverão sofrer oscilações até a máquina atingir a nova condição estável.

Além da mudança da condição de carregamento, outras perturbações, como distúrbios temporários de tensão ou da própria carga, podem provocar oscilações transitórias semelhantes. Ainda assim, estas perturbações não chegam a caracterizar, normalmente, uma condição transitória que mereça um estudo especial. Em todas estas situações, o usuário da máquina não chega a perceber as oscilações ocorrentes e estas variações de carga são analisadas, quase que exclusivamente, sob o ponto de vista de regime permanente. É costume utilizar-se nestas análises curvas típicas, como a curva de conjugado  $\times$  velocidade ou uma curva de conjugado  $\times$  tensão, que servem para avaliar as condições da máquina em manter determinada carga em funcionamento.

Uma das mais importantes situações de regime transitório é a partida do motor, quando ocorrem grandes variações nos valores de corrente, velocidade, conjugado, etc. O conhecimento destas variações, que são normalmente registradas através de curvas obtidas por ensaios ou por simulações, pode ser muito importante na análise do comportamento do motor frente às condições impostas pela rede ou pela carga. Para a análise desta, ou de outras quaisquer condições transitórias, pode-se utilizar o sistema de equações da

máquina de indução apresentado na equação V.1, no início deste capítulo.

#### V.4.1 Sistema de Equações

Na modelagem estudada, a tensão aplicada no enrolamento auxiliar será considerada independente da tensão do enrolamento principal, enquanto comercialmente, usa-se a tensão do enrolamento auxiliar tomada da metade do enrolamento principal:

$$v_{sa} = \sqrt{2} V_a \cos \omega_s t \quad (V.107)$$

A corrente no capacitor que está ligado em série com o enrolamento auxiliar pode ser relacionada com a sua tensão terminal pela seguinte equação:

$$i_c = i_{sa} = C_a \frac{d}{dt} v_c \quad (V.108)$$

Essa nova equação deve ser incluída no sistema de equações da máquina, resultando em um sistema com 3 equações do estator e m (número de barras) equações do rotor:

O sistema ficará com o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_{sp} \\ v_{sa} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{sp} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & R_{sa} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right\} + \frac{d}{dt} \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} -C & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_{sp} & 0 & [L_{srp}] & & \\ 0 & 0 & L_{sa} & [L_{sra}] & & \\ \hline 0 & [L_{rsp}] & [L_{rsa}] & [L_{rr}] & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array} \right\} \begin{bmatrix} v_c \\ i_{sp} \\ i_{sa} \\ i_{r1} \\ \vdots \\ i_{rm} \end{bmatrix}, \quad (V.109)$$

onde:  $L_{srp}$  e  $L_{sra}$  já foram definidas em (V.4) e (V.5)

$$e \quad L_{sr} = \begin{bmatrix} [L_{srp}] \\ [L_{sra}] \end{bmatrix} \quad (V.110)$$

#### V.4.2 Aplicação da Transformação de Componentes Simétricas

Como no estudo do regime permanente, não há necessidade de aplicar transformações às variáveis do estator e a mesma matriz  $B$ , já definida anteriormente, deve ser aplicada às variáveis do rotor. A transformação pode ser realizada pelo uso das matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1_{3 \times 3} & B \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1_{3 \times 3} & B^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{V. 111})$$

Após a transformação, o sistema toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_{sp} \\ v_{sa} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & R_{sp} & 0 \\ 1 & 0 & R_{sa} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [0]_{3 \times m} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} [0]_{m \times 3} \\ \\ \\ \end{bmatrix} & B R_{rr} B^{-1} \end{array} \right\} + \frac{d}{dt} \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} -C_a & 0 & 0 \\ 0 & L_{sp} & 0 \\ 0 & 0 & L_{sa} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [0]_{1 \times m} \\ \mathcal{L}_{srp} B^{-1} \\ \mathcal{L}_{sra} B^{-1} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ B \mathcal{L}_{rsp} & B \mathcal{L}_{rsa} \\ 0 \end{bmatrix} & B \mathcal{L}_{rr} B^{-1} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} v_c \\ i_{sp} \\ i_{sa} \\ i_{r1} \\ \vdots \\ i_{rm} \end{bmatrix}, \quad (\text{V. 112})$$

Já calculadas anteriormente,  $R_{rr} = B R_{rr} B^{-1}$  e  $L_{rr} = B \mathcal{L}_{rr} B^{-1}$ , são as mesmas matrizes diagonais definidas em (III.16) e (III.23).

As matrizes  $L_{srp} = \mathcal{L}_{srp} B^{-1}$  e  $L_{rsp} = B \mathcal{L}_{rsp}$  são as mesmas definidas no regime permanente e as matrizes  $L_{sra} = \mathcal{L}_{sra} B^{-1}$  e  $L_{rsa} = B \mathcal{L}_{rsa}$  também são encontradas pelos mesmos processos de  $L_{srp}$  e  $L_{rsp}$ , como mostrado a seguir:

$$L_{sra} = \mathcal{L}_{sra} B^{-1} =$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{L_{sran}}{2} \left\{ \begin{bmatrix} e^{jn(p\phi + \pi/2)} & e^{jn(p\phi + \pi/2 + p2\pi/m)} & \dots & e^{jn(p\phi + \pi/2 + p(m-1)2\pi/m)} \end{bmatrix} + \right. \\ \left. \begin{bmatrix} e^{-jn(p\phi + \pi/2)} & e^{-jn(p\phi + \pi/2 + p2\pi/m)} & \dots & e^{-jn(p\phi + \pi/2 + p(m-1)2\pi/m)} \end{bmatrix} \right\} B^{-1} \quad (\text{V. 113})$$

Como  $b = e^{j2\pi/m}$ , então:

$$L_{rsa} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{L_{sran}}{2} \left\{ e^{jn(p\phi+\pi/2)} \begin{bmatrix} 1 & b^{np} & b^{2np} & \dots & b^{(m-1)np} \end{bmatrix} + \right. \\ \left. e^{-jn(p\phi+\pi/2)} \begin{bmatrix} 1 & b^{-np} & b^{-2np} & \dots & b^{-(m-1)np} \end{bmatrix} \right\} B^{-1} \quad (V.114)$$

Colocando sob a forma de só um somatório, tem-se:

$$L_{rsa} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{L_{sran}}{2} e^{jn(p\phi+\pi/2)} \begin{bmatrix} 1 & b^{np} & b^{2np} & \dots & b^{(m-1)np} \end{bmatrix} B^{-1} \quad (V.115)$$

Efetuada a multiplicação por  $B^{-1}$ , chega-se a:

$$L_{rsa} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{L_{sran}}{2\sqrt{m}} e^{jn(p\phi+\pi/2)} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \begin{bmatrix} b^{knp} & b^{k(np-1)} & \dots & b^{k(np-(m-1))} \end{bmatrix} \right\} \quad (V.116)$$

$$L_{rsa} = B L_{rsa} =$$

$$B \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{L_{sran}}{2} \left\{ \left[ e^{jn(p\phi+\pi/2)} \quad e^{jn(p\phi+\pi/2+p2\pi/m)} \quad \dots \quad e^{jn(p\phi+\pi/2+p(m-1)2\pi/m)} \right]^t + \right. \\ \left. \left[ e^{-jn(p\phi+\pi/2)} \quad e^{-jn(p\phi+\pi/2+p2\pi/m)} \quad \dots \quad e^{-jn(p\phi+\pi/2+p(m-1)2\pi/m)} \right]^t \right\} \quad (V.117)$$

Fazendo uso da relação  $b = e^{j2\pi/m}$ , tem-se:

$$L_{rsa} = B \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{L_{sran}}{2} \left\{ e^{jn(p\phi+\pi/2)} \begin{bmatrix} 1 & b^{np} & b^{2np} & \dots & b^{(m-1)np} \end{bmatrix}^t + \right. \\ \left. e^{-jn(p\phi+\pi/2)} \begin{bmatrix} 1 & b^{-np} & b^{-2np} & \dots & b^{-(m-1)np} \end{bmatrix}^t \right\} \quad (V.118)$$

Colocando sob a forma de só um somatório, chega-se a:

$$L_{rsa} = B \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{L_{sran}}{2} e^{-jn(p\phi+\pi/2)} \begin{bmatrix} 1 & b^{-np} & b^{-2np} & \dots & b^{-(m-1)np} \end{bmatrix}^t \quad (V.119)$$

Efetutando-se a multiplicação por B, resulta em:

$$L_{rsa} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{L_{sran}}{2\sqrt{m}} e^{-jn(p\phi+\pi/2)} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \begin{bmatrix} b^{-knp} & b^{-k(np-1)} & \dots & b^{-k(np-(m-1))} \end{bmatrix}^t \right\} \quad (V.120)$$

Visualmente constata-se a relação:

$$L_{rsa} = L_{sra}^{t*} \quad (V.121)$$

Assim como a expressão de  $L_{srpn}$ , a expressão de  $L_{sran}$  também não leva em conta o sinal de n e devido a semelhança nas expressões de  $L_{sra}$  e  $L_{srp}$  todas as deduções feitas para  $L_{srp}$  são válidas para  $L_{sra}$ . As colunas de  $L_{sra}$  serão nulas sempre que as colunas de  $L_{srp}$  forem nulas e os elementos das matrizes  $L_{sra}$  e  $L_{rsa}$  serão por analogia, respectivamente:

$$\frac{\sqrt{m}}{2} L_{sran} e^{jn(p\phi+\pi/2)} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{m}}{2} L_{sran} e^{-jn(p\phi+\pi/2)} \quad (V.122)$$

É claro também que só se considera uma harmônica em cada posição da matriz  $L_{sra}$ .

A matriz  $L_{sr} B^{-1} = \begin{bmatrix} [L_{srp}] \\ [L_{sra}] \end{bmatrix}$  será chamada  $L_{sr}$  e o sistema pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_{sp} \\ v_{sa} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & R_{sp} & 0 \\ 1 & 0 & R_{sa} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [0]_{3 \times r} \\ R_{rr} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} [0]_{r \times 3} \end{bmatrix} & \end{array} \right\} + \frac{d}{dt} \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} -Ca & 0 & 0 \\ 0 & L_{sp} & 0 \\ 0 & 0 & L_{sa} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [0]_{1 \times r} \\ L_{sr} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} L_{rs} \\ L_{rr} \end{bmatrix} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} v_c \\ i_{sp} \\ i_{sa} \\ i_{r1} \\ \vdots \\ i_{rr} \end{bmatrix}, \quad (V.123)$$

onde:  $L_{rs} = B L_{rs} = L_{sr}^{t*}$ ,

$r = \frac{gm}{2p}$  é o número de colunas não nulas da matriz  $L_{sr}$ , (ou de linhas da matriz  $L_{rs}$ ), ficando o sistema com ordem  $3+r$ .

A matriz  $L_{sr}$  segue as mesmas regras de composição da matriz  $L_{srp}$  no

regime permanente. Assim os elementos de  $L_{sr}$  serão:

Para  $r$  par:

Coluna	linha 1 (enr. principal)	linha 2 (enr. auxiliar)
$p(1-r)(\text{Mod } m)$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsrp}_{p(1-r)} e^{j p(1-r)\phi}$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsra}_{p(1-r)} e^{j(1-r)(p\phi+\pi/2)}$
$p(3-r)(\text{Mod } m)$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsrp}_{p(3-r)} e^{j p(3-r)\phi}$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsra}_{p(3-r)} e^{j(3-r)(p\phi+\pi/2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-p(\text{Mod } m)$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsrp}_{-p} e^{-j p\phi}$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsra}_{-p} e^{-j(p\phi+\pi/2)}$
$p(\text{Mod } m)$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsrp}_p e^{j p\phi}$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsra}_p e^{j(p\phi+\pi/2)}$
$3p(\text{Mod } m)$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsrp}_{3p} e^{j 3p\phi}$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsra}_{3p} e^{j 3(p\phi+\pi/2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p(r-3)(\text{Mod } m)$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsrp}_{p(r-3)} e^{j p(r-3)\phi}$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsra}_{p(r-3)} e^{j(r-3)(p\phi+\pi/2)}$
$p(r-1)(\text{Mod } m)$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsrp}_{p(r-1)} e^{j p(r-1)\phi}$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsra}_{p(r-1)} e^{j(r-1)(p\phi+\pi/2)}$

(V. 124)

e para  $r$  ímpar:

Coluna	linha 1 (enr. principal)	linha 2 (enr. auxiliar)
$p(2-r)(\text{Mod } m)$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsrp}_{p(2-r)} e^{j p(2-r)\phi}$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsra}_{p(2-r)} e^{j(2-r)(p\phi+\pi/2)}$
$p(4-r)(\text{Mod } m)$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsrp}_{p(4-r)} e^{j p(4-r)\phi}$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsra}_{p(4-r)} e^{j(4-r)(p\phi+\pi/2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-p(\text{Mod } m)$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsrp}_{-p} e^{-j p\phi}$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsra}_{-p} e^{-j(p\phi+\pi/2)}$
$p(\text{Mod } m)$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsrp}_p e^{j p\phi}$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsra}_p e^{j(p\phi+\pi/2)}$
$3p(\text{Mod } m)$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsrp}_{3p} e^{j 3p\phi}$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsra}_{3p} e^{j 3(p\phi+\pi/2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p(r-2)(\text{Mod } m)$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsrp}_{p(r-2)} e^{j p(r-2)\phi}$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsra}_{p(r-2)} e^{j(r-2)(p\phi+\pi/2)}$
$pr(\text{Mod } m)$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsrp}_{pr} e^{j pr\phi}$	$\sqrt{m}/2 \text{ Lsra}_{pr} e^{j r(p\phi+\pi/2)}$

(V. 125)

### V.4.3 Sistema a Coeficientes Constantes

Como no regime permanente, as variáveis devem ser transformadas para um sistema a coeficientes constantes. Aplica-se a mesma matriz  $Tr$ , já utilizada anteriormente para as variáveis do rotor, não havendo necessidade de transformar as variáveis do estator.

A transformação pode ser realizada através das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 \times 3 & \\ & & Tr \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 \times 3 & \\ & & Tr \end{bmatrix}. \quad (V.126)$$

A aplicação da transformação é feita de forma semelhante ao que se fez no regime permanente, deixando o sistema com algumas operações para serem efetuadas:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_{sp} \\ v_{sa} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & R_{sp} & 0 \\ 1 & 0 & R_{sa} \end{array} & \begin{array}{c} [0]_{3 \times r} \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} [0]_{r \times 3} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} R_{rr} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} [0]_{1 \times r} \\ \frac{d}{dt} L_{sr} Tr^{-1} \\ \end{array} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} v_c \\ i_{sp} \\ i_{sa} \\ i_{r1} \\ \vdots \\ i_r \end{bmatrix} +$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} -C_a & 0 & 0 \\ 0 & L_{sp} & 0 \\ 0 & 0 & L_{sa} \end{array} & \begin{array}{c} [0]_{1 \times r} \\ L_{sr} Tr^{-1} \\ \end{array} \end{array} \right\} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_c \\ i_{sp} \\ i_{sa} \\ i_{r1} \\ \vdots \\ i_r \end{bmatrix}$$

(V.127)

Os cálculos pendentes são efetuados a seguir:

$$(1) L_{sr} Tr^{-1}$$

A matriz  $L_{sr}$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$L_{sr} = M_{sr} Tr,$$

$$\text{onde: } M_{sr} = \frac{\sqrt{m}}{2} \begin{bmatrix} \dots & L_{srp_5} & L_{srp_3} & L_{srp_1} & L_{srp_1} & L_{srp_3} & L_{srp_5} & \dots \\ \dots & -jL_{sra_5} & jL_{sra_3} & -jL_{sra_1} & jL_{sra_1} & -jL_{sra_3} & jL_{sra_5} & \dots \end{bmatrix}. \quad (V.128)$$



Com isso,  $\mathbb{L}_{sr} \text{Tr}^{-1} = \mathbb{M}_{sr} \text{Tr} \text{Tr}^{-1} = \mathbb{M}_{sr}$ . (V.129)

(2)  $\frac{d}{dt}(\mathbb{L}_{sr} \text{Tr}^{-1})$

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{L}_{sr} \text{Tr}^{-1}) = \frac{d}{dt}(\mathbb{M}_{sr}) = 0$$

Porque  $\mathbb{M}_{sr}$  só tem elementos não variantes no tempo.

(3)  $\frac{d}{dt}(\text{Tr}^{-1})$

Este cálculo já foi efetuado no regime permanente, dando como resultado:

$\frac{d}{dt} \text{Tr}^{-1} = -j\omega \mathbb{E}_r \text{Tr}^{-1}$ , sendo que as matrizes  $\mathbb{E}_r$  (para  $r$  par e  $r$  ímpar) são as mesmas apresentadas nas equações (V.50-a) e (V.50-b).

(4)  $\text{Tr} \mathbb{L}_{rs}$

Como  $\mathbb{L}_{rs} = \mathbb{L}_{sr}^{t*}$  e  $\mathbb{L}_{sr} = \mathbb{M}_{sr} \text{Tr}$ , então:  $\text{Tr} \mathbb{L}_{rs} = \text{Tr} \mathbb{L}_{sr}^{t*} = \text{Tr}(\mathbb{M}_{sr} \text{Tr})^{t*}$ .

Logo,  $\text{Tr} \mathbb{L}_{rs} = \text{Tr}(\text{Tr}^t \mathbb{M}_{sr}^t)^* = \text{Tr}(\text{Tr} \mathbb{M}_{sr}^t)^* = \text{Tr} \text{Tr}^{-1} \mathbb{M}_{sr}^{t*} = \mathbb{M}_{sr}^{t*}$ .

Ou seja,  $\text{Tr} \mathbb{L}_{rs} = \mathbb{M}_{rs}$ . (V.130)

(5)  $\text{Tr} \frac{d}{dt}(\mathbb{L}_{rs})$

Como  $\mathbb{L}_{rs} = \mathbb{L}_{sr}^{t*}$ ,  $\frac{d}{dt}(\mathbb{L}_{rs}) = \frac{d}{dt}(\mathbb{L}_{sr}^{t*}) = \frac{d}{dt}(\mathbb{M}_{sr} \text{Tr})^{t*}$ , então:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{L}_{rs} = \frac{d}{dt}(\text{Tr}^{-1} \mathbb{M}_{sr}^{t*}).$$

Como  $\mathbb{M}_{sr}$  não é variante no tempo,  $\frac{d}{dt}(\text{Tr}^{-1} \mathbb{M}_{sr}^{t*}) = (\frac{d}{dt} \text{Tr}^{-1}) \mathbb{M}_{sr}^{t*}$ , então:

$$\text{Tr} \frac{d}{dt} \mathbb{L}_{rs} = \text{Tr}(-j\omega \mathbb{E}_r \text{Tr}) \mathbb{M}_{sr}^{t*} = -j\omega \mathbb{E}_r \mathbb{M}_{sr}^{t*} = -j\omega \mathbb{E}_r \mathbb{M}_{rs}, \quad (V.131)$$

onde:

$$M_{rs} = \sqrt{m}/2 \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ L_{srp_5} & jL_{srp_5} \\ L_{srp_3} & -jL_{srp_3} \\ L_{srp_1} & jL_{srp_1} \\ L_{srp_1} & -jL_{srp_1} \\ L_{srp_3} & jL_{srp_3} \\ L_{srp_5} & +jL_{srp_5} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (V.132)$$

Simplificadamente, o sistema pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_{sp} \\ v_{sa} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & R_{sp} & 0 \\ 1 & 0 & R_{sa} \\ 0 & -j\omega E_r M_{rs} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0]_{3 \times r} \\ R_{rr} - j\omega E_r L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_{sp} \\ i_{sa} \\ i_r \\ \vdots \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_a & 0 & 0 \\ 0 & L_{sp} & 0 \\ 0 & 0 & -L_{sa} \\ 0 & M_{rs} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0]_{1 \times r} \\ M_{sr} \\ L_{rr} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_c \\ i_{sp} \\ i_{sa} \\ i_r \\ \vdots \\ i_r \end{bmatrix} \quad (V.133)$$

Conjugado Eletromagnético.

$$T_e = i_s^{t*} \left( \frac{d}{d\phi} \ell_{sr} \right) i_r = i_s^{t*} \frac{d}{d\phi} (L_{sr} B) i_r = i_s^{t*} \left( \frac{d}{d\phi} L_{sr} \right) B i_r \quad (V.134)$$

⇒

$$T_e = i_s^{t*} \left( \frac{d}{d\phi} L_{sr} \right) i_r = i_s^{t*} \left( \frac{d}{d\phi} M_{sr} T_r \right) i_r = i_s^{t*} M_{sr} \frac{d}{d\phi} T_r i_r \quad (V.135)$$

⇒

$$T_e = i_s^{t*} M_{sr} (jE_r T_r) i_r = j i_s^{t*} M_{sr} E_r i_r = j i_s^{t*} M T i_r, \quad (V.136)$$

onde  $MT = M_{sr} E_r$

#### V.4.4 Transformação de variáveis no estator

Para determinar as correntes em regime transitório da máquina monofásica, o motor de indução monofásico pode ser representado pelo sistema de equações mostrado em (V.133), sem a aplicação de qualquer outra transformação de variáveis. Porém, na aplicação dos métodos numéricos empregados na solução de

sistema de equações diferenciais, como o da Equação (V.133), é necessário inverter a matriz de coeficientes do vetor de derivadas das correntes. Como essa matriz, na forma em que se encontra, possui elementos complexos (em  $M_{sr}$ ), uma outra transformação de componentes simétricas para simplificar a inversão desta matriz pode ser aplicada no estator, produzindo uma nova matriz só com elementos reais.

A transformação proposta atuará somente sobre as variáveis do estator, através das seguintes matrizes:

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & +j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & +j \end{bmatrix}. \quad (\text{V.137})$$

As variáveis são transformadas da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{sp} \\ \hat{u}_{sa} \end{bmatrix} = D \cdot \begin{bmatrix} v_{sp} \\ v_{sa} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_{sa} \end{bmatrix} = D \cdot \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_{sa} \end{bmatrix}, \quad (\text{V.138})$$

permanecendo inalteradas as demais variáveis do sistema.

Para efetivar a nova transformação nas equações do sistema, multiplica-se à esquerda da Equação (V.133), a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & D & \\ & & I_{r \times r} \end{bmatrix} \quad (\text{V.139})$$

e o vetor de correntes é substituído pela relação inversa de transformação, apresentada na forma abaixo:

$$\begin{bmatrix} v_c \\ i_{sp} \\ i_{sa} \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \\ & -j/\sqrt{2} & j/\sqrt{2} & \\ & & & I_{r \times r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_c \\ i_{sp} \\ i_{sa} \\ i_r \end{bmatrix}. \quad (\text{V.140})$$

O sistema ficará com o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_{sp} \\ \dot{q}_{sa} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -j/\sqrt{2} & j/\sqrt{2} \\ j/\sqrt{2} & R_1 & R_2 \\ -j/\sqrt{2} & R_2 & R_1 \\ 0 & -j\omega E_r M_{rs} D^{-1} & R_{rr} - j\omega E_r L_{rr} \\ 0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_c \\ i_{sp} \\ i_{sa} \\ i_{r_1} \\ \vdots \\ i_{r_r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_a & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & L_2 \\ 0 & L_2 & L_1 \\ 0 & M_{rs} D^{-1} & L_{rr} \\ 0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0]_{1 \times r} \\ D \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_{sa} \\ i_{r_1} \\ \vdots \\ i_{r_r} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (V.141)$$

onde:  $DM_{sr} = M_{sro} =$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{m}}{2} \begin{bmatrix} 1+j \\ 1-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & L_{srp_5} & L_{srp_3} & L_{srp_1} & L_{srp_1} & L_{srp_3} & L_{srp_5} & \dots \\ \dots & -jL_{sra_5} & jL_{sra_3} & -jL_{sra_1} & jL_{sra_1} & -jL_{sra_3} & jL_{sra_5} & \dots \end{bmatrix} \quad (V.142)$$

$$e \quad M_{rs} D^{-1} = \frac{\sqrt{m}}{2} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ L_{srp_3} & +jL_{sra_3} \\ L_{srp_1} & +jL_{sra_1} \\ L_{srp_1} & -jL_{sra_1} \\ L_{srp_3} & +jL_{sra_3} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}. \quad (V.143)$$

Efetutando-se as multiplicações, tem-se:

$$DM_{sr} = \frac{\sqrt{2m}}{4} \begin{bmatrix} \dots & L_{srp_5} + L_{sra_5} & L_{srp_3} - L_{sra_3} & L_{srp_1} + L_{sra_1} & L_{srp_1} - L_{sra_1} \\ \dots & L_{srp_5} - L_{sra_5} & L_{srp_3} + L_{sra_3} & L_{srp_1} - L_{sra_1} & L_{srp_1} + L_{sra_1} \\ & & L_{srp_3} + L_{sra_3} & L_{srp_5} - L_{sra_5} & \dots \\ & & L_{srp_3} - L_{sra_3} & L_{srp_5} + L_{sra_5} & \dots \end{bmatrix} \quad (V.144)$$

$$e \quad M_{rs} D^{-1} = \frac{\sqrt{2m}}{4} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ L_{srp_3} - L_{sra_3} & L_{srp_3} + L_{sra_3} \\ L_{srp_1} + L_{sra_1} & L_{srp_1} - L_{sra_1} \\ L_{srp_1} - L_{sra_1} & L_{srp_1} + L_{sra_1} \\ L_{srp_3} + L_{sra_3} & L_{srp_3} - L_{sra_3} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (V.145)$$

A matriz  $DM_{sr}$  e a matriz  $M_{rs}D^{-1}$  não possuem elementos complexos. Além disso,  $M_{rs}D^{-1} = (AM_{sr})^t$ .

Substituindo-se  $DM_{sr}$  por  $M_{sro}$  e  $M_{rs}D^{-1}$  por  $M_{rso}$ , reescreve-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u}_{sp} \\ \hat{u}_{sa} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -j/\sqrt{2} & j/\sqrt{2} \\ j/\sqrt{2} & R_1 & R_2 \\ -j/\sqrt{2} & R_2 & R_1 \\ 0 & -j\omega E_r M_{rso} & R_{rr} - j\omega E_r L_{rr} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_c \\ i_{sp} \\ i_{sa} \\ i_{r_1} \\ \vdots \\ i_{r_m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_a & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & L_2 \\ 0 & L_2 & L_1 \\ 0 & M_{rso} & L_{rr} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0]_{1xr} \\ M_{sro} \\ \frac{d}{dt} \\ i_{sp} \\ i_{sa} \\ i_{r_1} \\ \vdots \\ i_{r_m} \end{bmatrix} \quad (V. 146)$$

$$\text{onde: } R_1 = \frac{R_{sp} + R_{sa}}{2}, \quad (V. 147)$$

$$R_2 = \frac{R_{sp} - R_{sa}}{2}, \quad (V. 148)$$

$$L_1 = \frac{L_{sp} + L_{sa}}{2} \quad e \quad (V. 149)$$

$$L_2 = \frac{L_{sp} - L_{sa}}{2} \quad (V. 150)$$

Além disso,

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{sp} \\ \hat{u}_{sa} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} V_p \cos \omega t \\ \sqrt{2} V_a \cos \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_p + jV_a \\ V_p - jV_a \end{bmatrix} \cos \omega t \quad (V. 151)$$

$$\text{ou } \hat{u}_{sp} = V_p \cos \omega t + jV_a \cos \omega t \quad (V. 152)$$

$$e \quad \hat{u}_{sa} = V_p \cos \omega t - jV_a \cos \omega t \quad (V. 153)$$

O sistema (V.145) é resolvido por um método numérico de integração e as correntes devem ser calculadas no sistema original.

$$\begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_{sa} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_{sa} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i_{sp} + i_{sa} \\ j(-i_{sp} + i_{sa}) \end{bmatrix} \quad (V. 154)$$

$$e \quad [i_r] = Tr^{-1} [i_r] \quad (V. 155)$$

$$\text{Como } Tr^{-1} \text{ é diagonal } \Rightarrow i_{r_1(k)} = e^{-jL(k)\phi} i_{r_1(k)}, \quad (V. 156)$$

onde  $i(k)$  e  $l(k)$  seguem a definição apresentada em (V. )

O cálculo das correntes do rotor, no sistema original é feito pela multiplicação de  $B^{-1}$  pelo vetor  $[i_r]$ , que é formado pelas correntes  $i_{r_{l(k)}}$  e por zeros nas linhas correspondentes as colunas nulas da matriz  $l_{sr}$ .

$$i_{r_j} = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{\infty} b^{-(j-1)l(k)} e^{-jL(k)\phi} i_{r_{l(k)}} \quad (V.157)$$

Cálculo do conjugado:

Na Equação (V.136) substitui-se  $l_s$  por  $D^{-1}i_s$ , encontrando-se:

$$T_e = j(i_s^t D^{-1})^* M_{sr} E_r i_r = j(i_s^t)^* (D^{-1})^{t*} M_{sr} E_r i_r. \quad (V.158)$$

Resolvendo-se os parênteses, chega-se a:

$$T_e = j i_s^t^* D M_{sr} E_r i_r = j i_s^t^* M_T i_r, \quad (V.159)$$

$$\text{onde } M_T = D M_{sr} E_r = M_{sro} E_r, \quad (V.160)$$

$$(D^{-1})^{t*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}^{t*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} = D \quad (V.161)$$

$$e \quad M_T = \frac{\sqrt{2m}}{4} \begin{bmatrix} \dots & Lsrp_5 + Lsra_5 & Lsrp_3 - Lsra_3 & Lsrp_1 + Lsra_1 & Lsrp_1 - Lsra_1 \\ \dots & Lsrp_5 - Lsra_5 & Lsrp_3 + Lsra_3 & Lsrp_1 - Lsra_1 & Lsrp_1 + Lsra_1 \\ & & Lsrp_3 + Lsra_3 & Lsrp_5 - Lsra_5 & \dots \\ & & Lsrp_3 - Lsra_3 & Lsrp_5 + Lsra_5 & \dots \end{bmatrix} E_r, \quad (V.162)$$

ou ainda,

$$M_T = \frac{\sqrt{2m}}{4} \begin{bmatrix} \dots & (Lsrp_5 + Lsra_5)(-5p) & (Lsrp_3 - Lsra_3)(-3p) & (Lsrp_1 + Lsra_1)(-p) \\ \dots & (Lsrp_5 - Lsra_5)(-5p) & (Lsrp_3 + Lsra_3)(-3p) & (Lsrp_1 - Lsra_1)(-p) \\ & (Lsrp_1 - Lsra_1)(p) & (Lsrp_3 + Lsra_3)(3p) & (Lsrp_5 - Lsra_5)(5p) \dots \\ & (Lsrp_1 + Lsra_1)(p) & (Lsrp_3 - Lsra_3)(3p) & (Lsrp_5 + Lsra_5)(5p) \dots \end{bmatrix} \quad (V.163)$$

$$\begin{aligned}
\text{Assim: } T_e = j \frac{\sqrt{2m}}{4} i_{sp}^* & \left[ \dots + (-5p)Lm_5^+ i_{r_{-5p(\text{Mod } m)}} + (-3p)Lm_3^- i_{r_{-3p(\text{Mod } m)}} + \right. \\
& (-p)Lm_1^+ i_{r_{-p(\text{Mod } m)}} + (p)Lm_1^- i_{r_{p(\text{Mod } m)}} + (3p)Lm_3^+ i_{r_{3p(\text{Mod } m)}} + \\
& \left. (5p)Lm_5^- i_{r_{5p(\text{Mod } m)}} \right] + i_{sa}^* \left[ \dots + (-5p)Lm_5^- i_{r_{-5p(\text{Mod } m)}} + \right. \\
& (-3p)Lm_3^+ i_{r_{-3p(\text{Mod } m)}} + (-p)Lm_1^- i_{r_{-p(\text{Mod } m)}} + \\
& \left. (p)Lm_1^+ i_{r_{p(\text{Mod } m)}} + (3p)Lm_3^- i_{r_{3p(\text{Mod } m)}} + (5p)Lm_5^+ i_{r_{5p(\text{Mod } m)}} \right] \Bigg\},
\end{aligned}
\tag{V.164}$$

$$\text{onde: } Lm_n^+ = Lsrp_n + Lsra_n \text{ e } Lm_n^- = Lsrp_n - Lnra_n$$

## V.5 Conclusões

A modelagem da máquina monofásica foi desenvolvida neste capítulo por extensão da modelagem da máquina trifásica. As transformações empregadas nas variáveis do rotor são as mesmas da máquina trifásica e as formas de obtenção das soluções também são semelhantes. Destacam-se a nova transformação empregada no estator pela característica assimétrica das matrizes envolvidas e pela distribuição das harmônicas que é feita apenas em uma linha da matriz de mútuas, contendo as duas componentes simétricas de cada ordem harmônica representada. Por esse motivo o espectro de harmônicas para a máquina monofásica é menos abrangente que o da máquina trifásica. Em geral, a maior parte das relações matemáticas envolvidas no desenvolvimento da modelagem da máquina monofásica pode ser estabelecida por analogia com as relações utilizadas na máquina trifásica e nesse mesmo caminho, no próximo capítulo, o desenvolvimento do modelo da máquina trifásica de gaiola dupla será apresentado.

## CAPÍTULO VI

### MÁQUINAS COM ROTOR DE DUPLA GAIOLA

Rotores com dupla gaiola são fabricados com a mesma finalidade dos rotores de barras profundas, que é a de melhorar o desempenho de partida do motor. Este tipo de rotor possui duas camadas de barras curto-circuitadas por anéis de extremidades, podendo ter dois anéis independentes ou apenas um anel comum às duas gaiolas em cada extremidade do rotor (Figura VI.1).

As barras da gaiola externa possuem menor área que as barras da gaiola interna (Figura VI.1) e por isso apresentam maior resistência. Por outro lado, a indutância das barras internas é maior que a das barras externas, devido ao fluxo que atravessa a ranhura entre as duas camadas (Figura VI.2).

Na partida, a frequência do rotor é igual à do estator e as barras internas possuem reatância elevada, acarretando uma corrente muito pequena nestas barras. Com isso a corrente do rotor vista pelo estator é, praticamente, a da gaiola superior, que possui uma alta resistência. Em regime de funcionamento normal, o escorregamento do rotor é baixo e por isso a frequência das correntes das barras também é muito pequena. Assim, a reatância das barras da gaiola interna se torna desprezível, possuindo esta gaiola, nesta situação, correntes significativas. A resistência do rotor vista pelo estator aproxima-se da composição em paralelo das resistências das duas gaiolas.

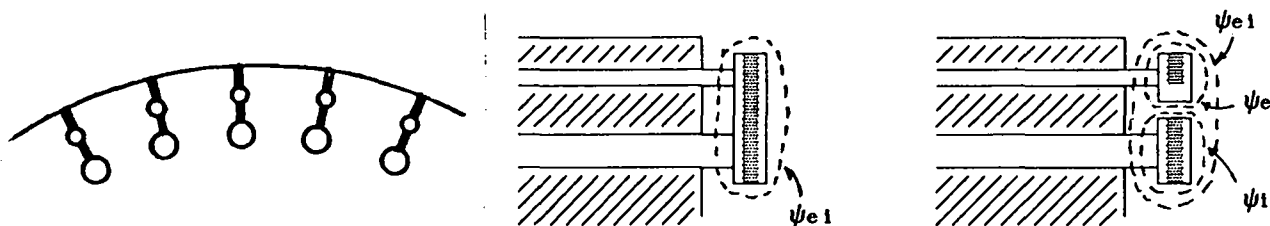
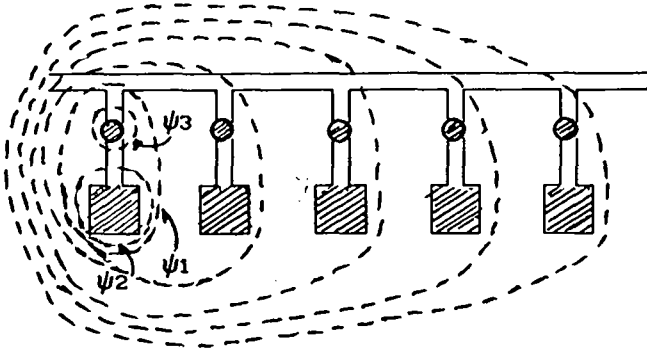


Figura VI.1 - Gaiolas de anéis independentes e de anéis comuns.



A distribuição de fluxos em relação às barras, no caso mais geral possível, deve assumir a configuração mostrada na Figura VI.2.



O fluxo  $\psi_3$  envolvendo somente a gaiola superior não deve existir normalmente em gaiolas com anel comum e o fluxo  $\psi_1$  representa um fluxo mútuo de dispersão, devendo gerar uma indutância mútua entre as duas gaiolas.

Figura VI.2 Distribuição dos fluxos no rotor.

As gaiolas podem ser modeladas de forma semelhante à gaiola simples, variando apenas na condição do anel ser comum ou não às duas gaiolas, em cada extremidade.

No caso mais geral o sistema de equação possui o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} \psi_s \\ \psi_{re} \\ \psi_{ri} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & R_{rre} & R_{rrei} \\ 0 & R_{rrie} & R_{rri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_{re} \\ i_{ri} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sre} & L_{sri} \\ L_{rse} & L_{rre} & L_{rrei} \\ L_{rsi} & L_{rrie} & L_{rri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_{re} \\ i_{ri} \end{bmatrix} \quad (VI.1)$$

A matriz  $R_{ss}$  e  $L_{ss}$  são as mesmas já definidas anteriormente porque representam parâmetros próprios do estator que em nada mudou.

Os fluxos criados pelo estator e enlaçado pelos circuitos do rotor terão caminhos preferenciais por baixo das barras da gaiola inferior (Figura VI.2), nunca enlaçando somente barras da gaiola superior. Define-se daí uma matriz de indutâncias mútuas igual à do motor de rotor simples. Na equação do estator ela aparece no termo  $\frac{d}{dt} L_{sri} i_{ri}$  e pode ser desdobrada em:

$$\frac{d}{dt} L_{sri} i_{re} + \frac{d}{dt} L_{sri} i_{ri} \quad (VI.2)$$

Os circuitos do rotor serão definidos novamente como caminhos de correntes de segmento de anel (Figura VI.3).

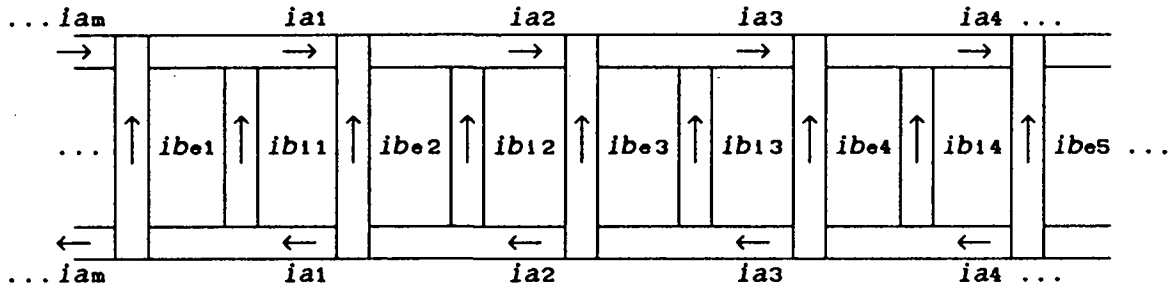


Figura VI.3 Circuitos do rotor

Percorrendo-se um caminho de corrente de segmento de anel ( $k$ ), encontra-se as seguintes quedas de tensão:

1) Quedas nas resistências das barras:

$$-r_{be_k} i_{be_k} + r_{be_{k+1}} i_{be_{k+1}} \quad (VI.3)$$

$$\text{e } -r_{b1_k} i_{b1_k} + r_{b1_{k+1}} i_{b1_{k+1}} \quad (VI.4)$$

2) Quedas nas resistências dos anéis:

$$\text{para anéis comuns, } -2r_{a_k} (i_{a_{ek}} + i_{a1_k}) \quad (VI.5)$$

ou para cada anel independente,

$$-2r_{a_{ek}} i_{a_{ek}} \quad (VI.6)$$

$$\text{e } -2r_{a1_k} i_{a1_k} \quad (VI.7)$$

3) Quedas devido aos fluxos de dispersão de cada barra:

$$-l_{be_k} \frac{d}{dt} i_{be_k} + l_{be_{k+1}} \frac{d}{dt} i_{be_{k+1}} \quad (VI.8)$$

$$e - lb_{1k} \frac{d}{dt} ib_{1k} + lb_{1k+1} \frac{d}{dt} ib_{1k+1} \quad (VI.9)$$

4) Quedas devido aos fluxos de dispersão dos anéis:

$$\text{para anéis comuns, } -2la_k \frac{d}{dt} (ia_{ek} + ia_{1k}) \quad (VI.10)$$

ou para cada anel independente,

$$-2la_{ek} \frac{d}{dt} ia_{ek} \quad (VI.11)$$

$$\text{e } -2la_{1k} \frac{d}{dt} ia_{1k} \quad (VI.12)$$

5) Quedas devido aos fluxos mútuos de dispersão das barras superpostas de duas gaiolas:

$$-lb_{e1k} \frac{d}{dt} (ib_{ek} + ib_{1k}) + lb_{e1k+1} \frac{d}{dt} (ib_{ek+1} + ib_{1k+1}) \quad (VI.13)$$

6) Quedas devido aos fluxos mútuos que atravessam o entreferro e enlaçam os caminhos de correntes vizinhos (Figura VI.2):

$$- \sum_{j=1}^m lrr_{kj} (ia_{ej} + ia_{1j}) \quad (VI.14)$$

7) Quedas devido aos fluxos mútuos entre estator e rotor:

$$- \sum_{j=1}^3 lrs_{kj} is_j \quad (VI.15)$$

Os circuitos do rotor devem ser analisados, em princípio, considerando-se que as correntes dos enrolamentos superiores e inferiores atuam de forma conjunta. Com isso o circuito do enrolamento de ordem  $k$  seria uma composição dos circuitos dos enrolamentos de ordem  $k$  de cada gaiola, contendo trechos em série e outros em paralelo.

Diagramas de blocos, contendo as quedas de tensão relacionadas, podem ser utilizados para se obter uma visualização dos circuitos do rotor. Como não há fontes ligadas aos circuitos do rotor, as quedas de tensão são somadas segundo as leis de Kirchoff e igualadas a zero. Com as relações conhecidas entre resistências, indutâncias e correntes desenvolve-se os diagramas e obtém-se as matrizes do sistema de equações do modelo, envolvendo as variáveis do rotor.

Diagrama de quedas de tensão no caminho de corrente de ordem  $k$   
circuito combinado para gaiola dupla com anéis independentes

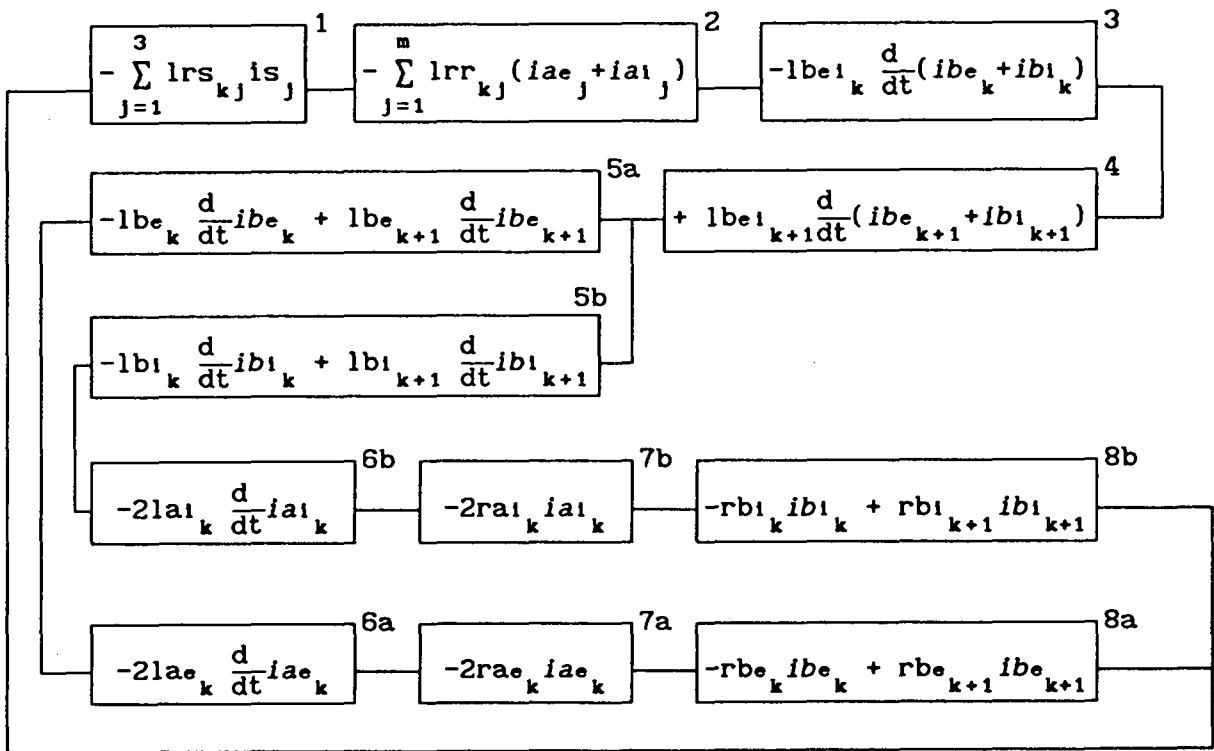


Figura VI.4 Diagrama de quedas de tensão no circuito combinado das gaiolas.

Considerando que:

$$l a e_k = l a e, \quad l a i_k = l a i, \quad (VI.16)$$

$$r a e_k = r a e, \quad r a i_k = r a i, \quad (VI.17)$$

$$lbe_k = lbe, \quad lbi_k = lbi, \quad (VI.18)$$

$$lbei_k = lbei, \quad (VI.19)$$

$$rbe_k = rbe, \quad rbi_k = rbi, \quad (VI.20)$$

$$ibe_k = ia_{ek} - ia_{e,k-1} \quad e \quad ibi_k = ia_{ik} - ia_{i,k-1}, \quad (VI.21)$$

o diagrama pode ser representado só em função das correntes de segmento de anel (ou de enrolamento do rotor).

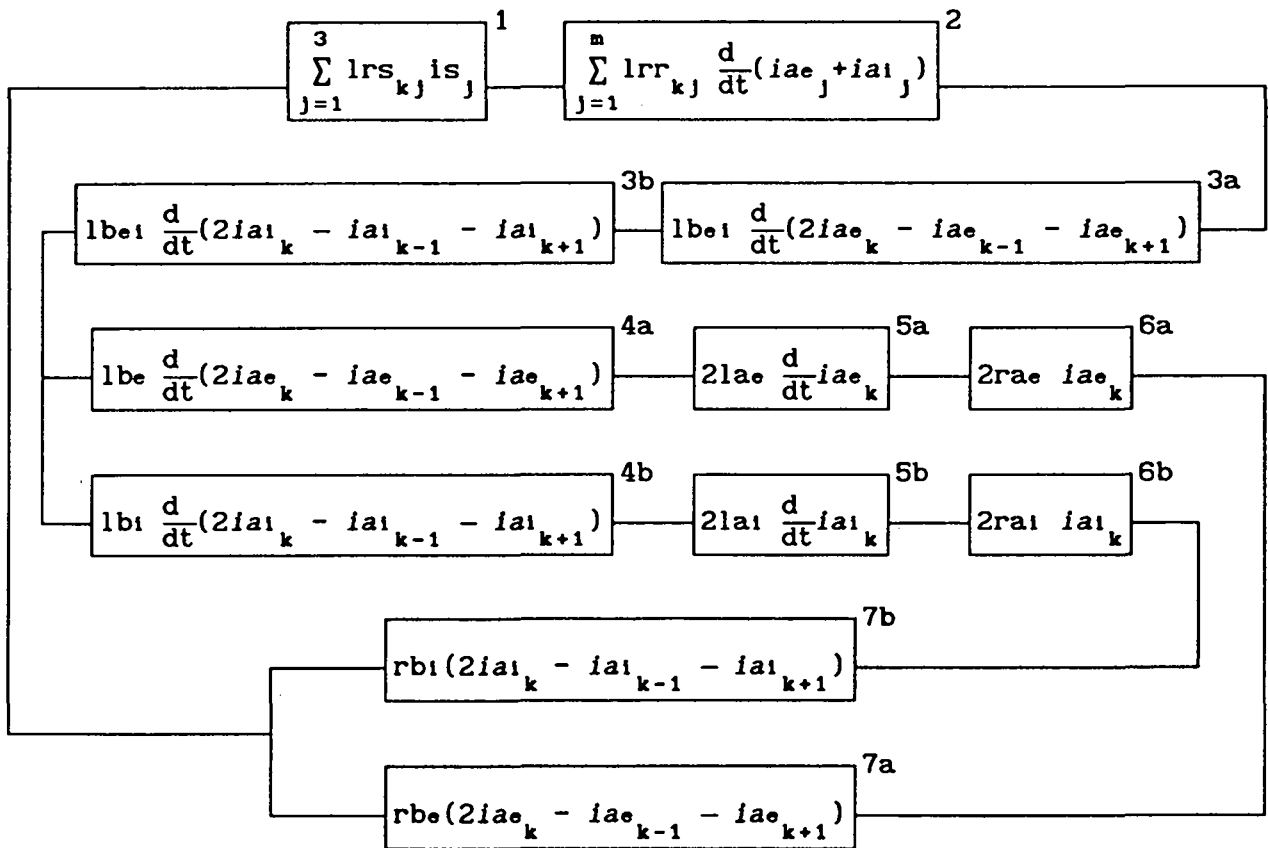


Figura VI.5 Diagrama de quedas de tensão do circuito combinado das gaiolas em função das correntes de segmento de anel.

O diagrama envolve as quedas de tensão para dois caminhos de correntes de segmento de anel, um de cada gaiola. O índice  $k$  indica a ordem da corrente ou do caminho considerado. Nos caminhos paralelos as correntes indicam à que gaiola está relacionado cada bloco de queda de tensão. Nos blocos em série, quando a corrente não é da gaiola que se está percorrendo, significa que as quedas de tensão são devidas a impedâncias mútuas entre as duas gaiolas. O mesmo pode ser concluído para blocos cujas correntes envolvidas são de outras fases do rotor (com índices diferentes de  $k$ ) ou são de enrolamentos do estator.

Diagrama de quedas de tensão no caminho de corrente de ordem  $k$   
circuito combinado para gaiola dupla com anéis comuns

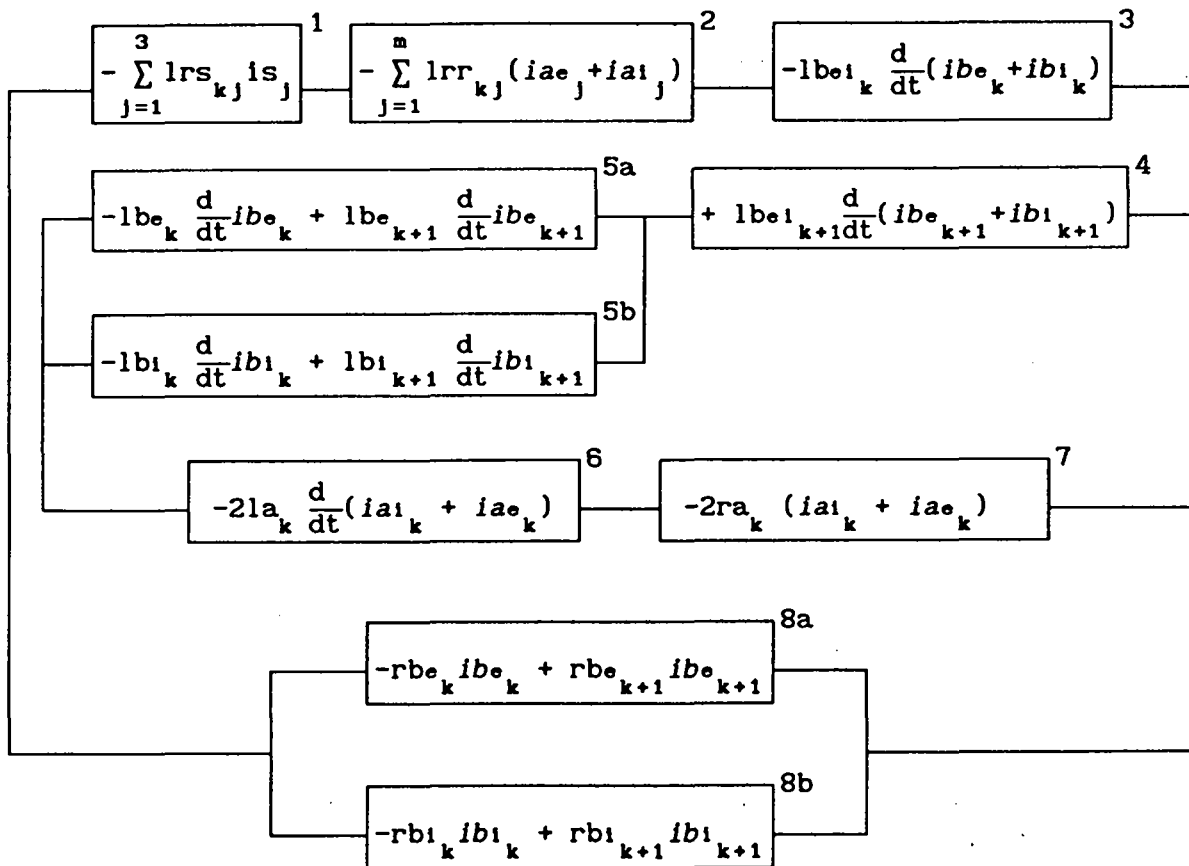


Figura VI.6 Diagrama de quedas de tensão no circuito combinado das gaiolas de anéis comuns.

Levando-se em consideração que  $la_k = la$ ,  $ra_k = ra$ , e ainda, que todas as relações mostradas em (VI.18), (VI.19), (VI.20) e (VI.21) são válidas também para as gaiolas de anéis comuns, o diagrama da Figura VI.6 pode ser modificado para o da Figura VI.7 onde as quedas de tensão são escritas em função das correntes de segmento de anel, como foi feito para a gaiola de anéis independentes.

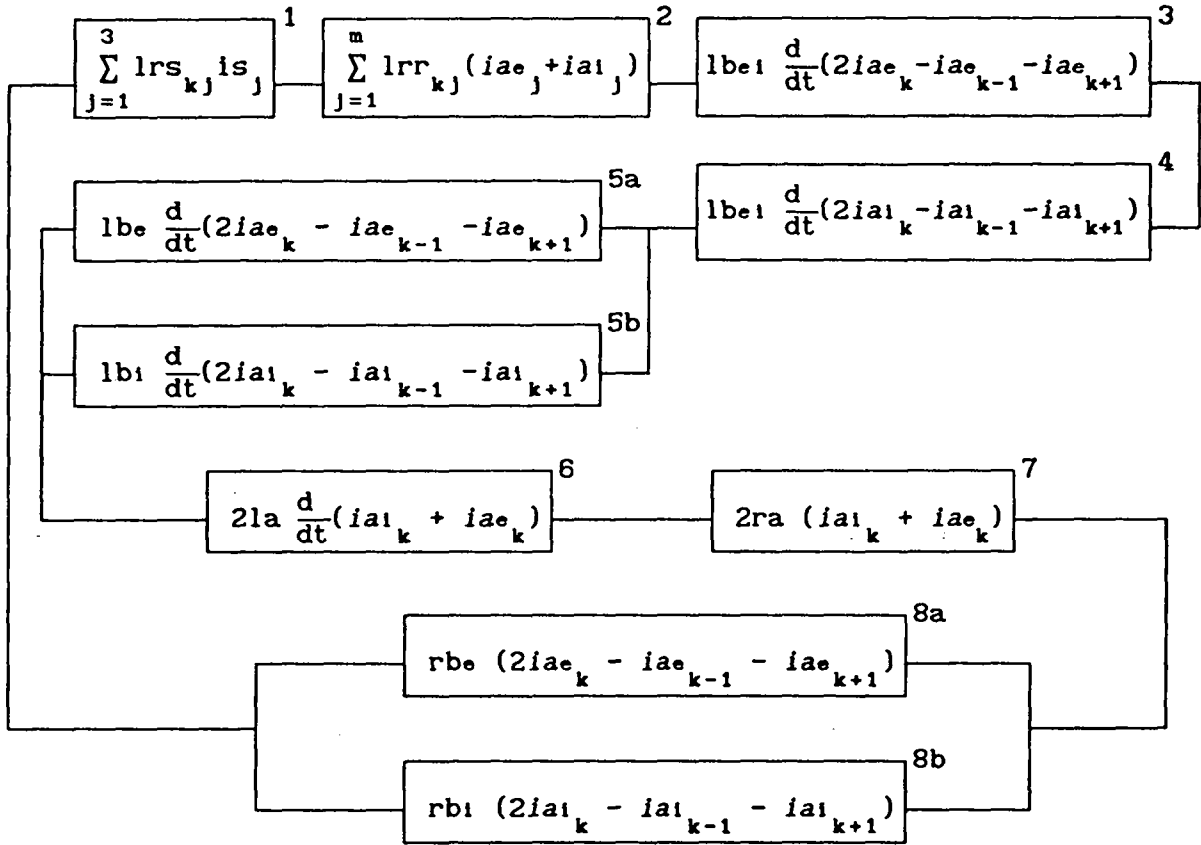


Figura VI.7 Diagrama de quedas de tensão do circuito combinado das gaiolas de anéis comuns em função das correntes de segmento de anel

### VI.1 Formalização das Matrizes

As matrizes do sistema apresentado em VI.1 são identificadas através de comparações com os diagramas das Figuras VI.5 e VI.7.

Rotor com gaiolas de anéis independentes:

A matriz  $R_{rre}$  é determinada através dos blocos com quedas resistivas relacionadas com as correntes  $iae_k$ , que correspondem no diagrama da Figura VI.5 aos blocos 6a e 7a.

$$\mathcal{R}_{rre} = \begin{bmatrix} 2r_{ae}+2r_{be} & -r_{be} & 0 & 0 \dots 0 & 0 & -r_{be} \\ -r_{be} & 2r_{ae}+2r_{be} & -r_{be} & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -r_{be} & 0 & 0 & 0 \dots 0 & -r_{be} & 2r_{ae}+2r_{be} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.22})$$

A matriz  $\mathcal{R}_{rri}$  é determinada através dos blocos com quedas resistivas relacionadas com as correntes  $ia_{ik}$ , que correspondem no diagrama da Figura VI.5 aos blocos 6b e 7b.

$$\mathcal{R}_{rri} = \begin{bmatrix} 2r_{ai}+2r_{bi} & -r_{bi} & 0 & 0 \dots 0 & 0 & -r_{bi} \\ -r_{bi} & 2r_{ai}+2r_{bi} & -r_{bi} & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -r_{bi} & 0 & 0 & 0 \dots 0 & -r_{bi} & 2r_{ai}+2r_{bi} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.23})$$

Para anéis independentes as matrizes  $\mathcal{R}_{rrei}$  e  $\mathcal{R}_{rrie}$  são matrizes nulas porque não existem outros blocos com quedas resistivas além dos já relacionados (que só indicaram caminhos separados através das resistências para as correntes das gaiolas).

A matriz  $\mathcal{L}_{rre}$  é determinada pelas quedas indutivas produzidas pelas correntes  $ia_{ek}$  que correspondem aos blocos 3a, 4a, 5a e à primeira parcela do bloco 2 da Figura VI.5.

$$\mathcal{L}_{rre} = L_r \begin{bmatrix} m-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & m-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & m-1 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 2l_{ae}+2l_{be}+2l_{bei} & -l_{be}-l_{bei} & 0 & 0 \dots 0 & 0 & -l_{be}-l_{bei} \\ -l_{be}-l_{bei} & 2l_{ae}+2l_{be}+2l_{bei} & -l_{be}-l_{bei} & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -l_{be}-l_{bei} & 0 & 0 & 0 \dots 0 & -l_{be}-l_{bei} & 2l_{ae}+2l_{be}+2l_{bei} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.24})$$

onde  $L_{rk}$ ,  $L_{r0}$  e  $L_r$  são expressões fornecidas em (III.28), (III.29) e (III.30).

A matriz  $\mathcal{L}_{rri}$  é determinada pelas quedas indutivas produzidas pelas correntes  $ia_{ik}$  que correspondem aos blocos 3b, 4b, 5b e a segunda parcela do bloco 2 da Figura VI.5.



$$\mathcal{L}_{rri} = L_r \begin{bmatrix} m-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & m-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & m-1 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 2l_{ai}+2l_{bi}+2l_{be1} & -l_{bi}-l_{be1} & 0 & 0 \dots 0 & 0 & -l_{bi}-l_{be1} \\ -l_{bi}-l_{be1} & 2l_{ai}+2l_{bi}+2l_{be1} & -l_{bi}-l_{be1} & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -l_{bi}-l_{be1} & 0 & 0 & 0 \dots 0 & -l_{bi}-l_{be1} & 2l_{ai}+2l_{bi}+2l_{be1} \end{bmatrix} \quad (VI.25)$$

Como no bloco 2 a queda total de tensão é resultante da soma das correntes das duas gaiolas, a parcela da corrente da gaiola externa indica uma indutância mútua para a gaiola interna e vice-versa. Os blocos 3a e 3b também indicam indutâncias mútuas entre as gaiolas porque as correntes  $i_{ae_k}$  e  $i_{ai_k}$  produzem quedas de tensão para as duas gaiolas, já que os blocos estão em série. E nas matrizes de indutâncias de dispersão  $\mathcal{L}_{rre}$  e  $\mathcal{L}_{rri}$  só foram consideradas as quedas produzidas por cada corrente na sua própria gaiola.

Assim define-se matrizes de indutâncias mútuas entre enrolamentos das duas gaiolas.

$$\mathcal{L}_{rrei} = \mathcal{L}_{rrie} = L_r \begin{bmatrix} m-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & m-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & m-1 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 2l_{be1} & -l_{be1} & 0 & 0 \dots 0 & 0 & -l_{be1} \\ -l_{be1} & 2l_{be1} & -l_{be1} & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -l_{be1} & 0 & 0 & 0 \dots 0 & -l_{be1} & 2l_{be1} \end{bmatrix} \quad (VI.26)$$

Como os fluxos mútuos entre estator e rotor enlaçam de forma simultânea as duas gaiolas do rotor, o primeiro bloco do diagrama representa a mesma queda de tensão para cada gaiola. Mantendo-se a forma como foram definidas as indutâncias mútuas entre estator e rotor no Capítulo II. Este primeiro bloco indicará duas matrizes de indutâncias mútuas iguais para as duas gaiolas. Assim as matrizes  $\mathcal{L}_{sre}$  e  $\mathcal{L}_{sri}$  são exatamente iguais à matriz  $\mathcal{L}_{sr}$  do motor de gaiola simples, definida no Capítulo II.

Rotor com anéis comuns:

As diferenças existentes entre os diagramas da Figura VI.5 e VI.7 indicam as seguintes modificações nas matrizes:

Nas matrizes  $R_{rre}$  e  $R_{rri}$ , troca-se  $r_{ae}$  e  $r_{ai}$  por  $r_a$ , já que a gaiola é única para as duas correntes.

Nas matrizes  $L_{rre}$  e  $L_{rri}$ , troca-se  $l_{ae}$  e  $l_{ai}$  por  $l_a$ , pelo mesmo motivo anterior.

Como no bloco 6 da Figura VI.7, a queda de tensão é dada pela soma das correntes das duas gaiolas, a indutância  $2l_a$  é uma dispersão simples na parcela da corrente da gaiola considerada e é uma dispersão mútua na parcela da outra corrente. Por isso as matrizes  $L_{rrei}$  e  $L_{rrie}$  terão os elementos da diagonal modificados de  $2l_{bei}$  para  $2l_a + 2l_{bei}$ .

No bloco 7 da Figura VI.7, a queda de tensão também é dada pela soma das correntes das duas gaiolas. Com isso, no caso de gaiolas de anéis comuns, duas matrizes de resistências mútuas  $R_{rrei}$  e  $R_{rrie}$  são definidas:

$$R_{rrei} = R_{rrie} = \text{diag}[2r_a \quad 2r_a \quad 2r_a \quad \dots \quad 2r_a] \quad (\text{VI.27})$$

## VI.2 Transformação em Componentes Simétricas

Como as matrizes geradas pelo modelo da máquina de gaiola dupla são compostas de matrizes com estruturas semelhantes às da máquina de rotor comum, a transformação de componentes simétricas aplicada ao modelo com dupla gaiola será definida por composição das mesmas matrizes da transformação aplicada na máquina de rotor comum.

Propõe-se a seguinte matriz de transformação:

$$C = \begin{bmatrix} A & & \\ & B & \\ & & B \end{bmatrix} \quad (\text{VI.28})$$

onde sua inversa é dada por:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & & \\ & B^{-1} & \\ & & B^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.29})$$

sendo A e B as mesmas matrizes apresentadas respectivamente nas expressões (III.1) e (III.2).

As operações consequentes da aplicação da transformação de componentes simétricas são apresentadas na Equação (VI.30). Constatando-se, por inspeção visual, a ocorrência de uma série de operações já realizadas no Capítulo III.

$$\begin{bmatrix} v_s \\ v_{re} \\ v_{ri} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathcal{R}_{ss}A^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & B\mathcal{R}_{re}B^{-1} & B\mathcal{R}_{rei}B^{-1} \\ 0 & B\mathcal{R}_{rei}B^{-1} & B\mathcal{R}_{ri}B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_{re} \\ i_{ri} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} A\mathcal{L}_{ss}A^{-1} & A\mathcal{L}_{sre}B^{-1} & A\mathcal{L}_{sri}B^{-1} \\ B\mathcal{L}_{rse}A^{-1} & B\mathcal{L}_{rre}B^{-1} & B\mathcal{L}_{rrei}B^{-1} \\ B\mathcal{L}_{rsi}A^{-1} & B\mathcal{L}_{rrie}B^{-1} & B\mathcal{L}_{rri}B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_{re} \\ i_{ri} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.30})$$

Os seguintes resultados são conhecidos do Capítulo III:

$$R_{ss} = A\mathcal{R}_{ss}A^{-1} \quad \text{e} \quad L_{ss} = A\mathcal{L}_{ss}A^{-1}$$

As matrizes  $\mathcal{L}_{sre}$ ,  $\mathcal{L}_{rse}$ ,  $\mathcal{L}_{sri}$  e  $\mathcal{L}_{rsi}$  são iguais às matrizes  $\mathcal{L}_{sr}$ ,  $\mathcal{L}_{rs}$ , portanto:

$$L_{sre} = L_{sri} = L_{sre} \quad \text{e} \quad L_{rse} = L_{rsi} = L_{rs}$$

As demais operações são efetuadas, encontrando-se os seguintes resultados:

$$R_{rre} = B\mathcal{R}_{rre}B^{-1} = \text{diag} [2r_{ae} + C_{orbe} \quad 2r_{ae} + C_{irbe} \quad \dots \quad 2r_{ae} + C_{rre}], \quad (\text{VI.31})$$

$$R_{rri} = B\mathcal{R}_{rri}B^{-1} = \text{diag} [2r_{ai} + C_{orbi} \quad 2r_{ai} + C_{irbi} \quad \dots \quad 2r_{ai} + C_{rri}], \quad (\text{VI.32})$$

onde  $C_k = 4 \sin^2 k\pi/m$ , como na máquina de gaiola simples.

Se a gaiola for de anéis comuns:  $r_{ae} = r_{ai} = r_a$ .

$$R_{rrei} = B\mathcal{R}_{rrei}B^{-1} = \text{diag} [2r_a \quad 2r_a \quad 2r_a \quad \dots \quad 2r_a \quad 2r_a] \quad (\text{VI.33})$$

$$R_{rrie} = B\mathcal{R}_{rrie}B^{-1} = B\mathcal{R}_{rrei}B^{-1} = R_{rrei} \quad (\text{VI.34})$$

Se for de anéis independentes:  $R_{rrei} = R_{rrie} = [0]$ .

$$L_{rre} = B\mathcal{L}_{rre}B^{-1} = \text{diag} [2l_{ae} \quad 2l_{ae} + C_1(l_{be} + l_{bei}) + mL_r \quad \dots \quad 2l_{ae} + C_r(l_{be} + l_{bei}) + mL_r], \quad (\text{VI.35})$$

$$L_{rri} = B\mathcal{L}_{rri}B^{-1} = \text{diag} [2l_{ai} \quad 2l_{ai} + C_1(l_{bi} + l_{bei}) + mL_r \quad \dots \quad 2l_{ai} + C_r(l_{bi} + l_{bei}) + mL_r] \quad (\text{VI.36})$$

Se for de anéis comuns:  $l_{ae} = l_{ai} = l_a$

$$L_{rrei} = B L_{rrei} B^{-1} = \text{diag} [2l_a \quad 2l_a + C_{ilbei} + m L_r \dots 2l_a + C_{ilbei} + m L_r] \quad (\text{VI.37})$$

$$L_{rrie} = B L_{rrie} B^{-1} = B L_{rrei} B^{-1} = L_{rrei} \quad (\text{VI.38})$$

Se for de anéis independentes, a indutância  $2l_a + C_{ilbei} + m L_r$  é substituída por  $C_{ilbei} + m L_r$ .

O sistema resultante toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} v_s \\ v_{re} \\ v_{ri} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & R_{rr} & R_{rr} \\ 0 & R_{rr} & R_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_{re} \\ i_{ri} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sre} & L_{sri} \\ L_{rse} & L_{rre} & L_{rrei} \\ L_{rsi} & L_{rrie} & L_{rri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_{re} \\ i_{ri} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.39})$$

### VI.3 Sistema a Coeficientes Constantes

A transformação utilizada é uma composição das matrizes de transformação utilizadas no modelo da máquina de gaiola simples:

$$T = \begin{bmatrix} T_s & & \\ & T_r & \\ & & T_r \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.40})$$

Sua inversa é dada por:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} T_s^{-1} & & \\ & T_r^{-1} & \\ & & T_r^{-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{VI.41})$$

onde  $T_s$  e  $T_r$  são as mesmas matrizes já utilizadas no Capítulo IV.

As operações são semelhantes às já aplicadas na máquina de gaiola simples e, como na transformação de componentes simétricas, a maior parte dos resultados são os mesmos já encontrados para as máquinas de gaiola simples.

Na Equação (VI.42) são apresentadas as operações consequentes da aplicação da nova transformação proposta:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_s \\ \dot{U}_{re} \\ \dot{U}_{ri} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T s R_{ss} T s^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & T r R_{rre} T r^{-1} & T r R_{rrei} T r^{-1} \\ 0 & T r R_{rrei} T r^{-1} & T r R_{rri} T r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_{re} \\ i_{ri} \end{bmatrix} +$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T s L_{ss} T s^{-1} & T s L_{sre} T r^{-1} & T s L_{sri} T r^{-1} \\ T r L_{rse} T s^{-1} & T r L_{rre} T r^{-1} & T r L_{rrei} T r^{-1} \\ T r L_{rsi} T s^{-1} & T r L_{rrie} T r^{-1} & T r L_{rri} T r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_{re} \\ i_{ri} \end{bmatrix}$$

(VI.42)

Cada operação envolvida na Expressão (VI.42) tem resultado conhecido do Capítulo IV. As matrizes diagonais quando pré-multiplicadas por Ts (ou Tr) e pós-multiplicadas por Ts<sup>-1</sup> (ou Tr<sup>-1</sup>) permanecerão inalteradas. Isso acontece com R<sub>ss</sub>, L<sub>ss</sub>, R<sub>rre</sub>, R<sub>rri</sub>, R<sub>rrei</sub>, R<sub>rrie</sub>, L<sub>rre</sub>, L<sub>rri</sub>, L<sub>rrei</sub> e L<sub>rrie</sub>.

As matrizes L<sub>sre</sub>, L<sub>sri</sub>, L<sub>rse</sub> e L<sub>rsi</sub> são exatamente iguais às matrizes L<sub>sr</sub> e L<sub>rs</sub>, sendo os resultados das operações de pré-multiplicação por Ts (ou Tr) e pós-multiplicação por Tr<sup>-1</sup> (ou Ts<sup>-1</sup>) os mesmos encontrados no modelo da máquina de gaiola simples, ou seja:

$$T s L_{sre} T r^{-1} = T s L_{sri} T r^{-1} = T s L_{sr} T r^{-1} = M_{sr} \quad (VI.43)$$

$$T r L_{rse} T s^{-1} = T r L_{rsi} T s^{-1} = T s L_{rs} T r^{-1} = M_{rs} \quad (VI.44)$$

$$T s \frac{d}{dt}(L_{sre} T r^{-1}) = T s \frac{d}{dt}(T s^{-1} M_{sr}) = -j\omega E_s M_{sr} \quad (VI.45)$$

$$T s \frac{d}{dt}(L_{sri} T r^{-1}) = T s \frac{d}{dt}(T s^{-1} M_{sr}) = -j\omega E_s M_{sr} \quad (VI.46)$$

$$T r \frac{d}{dt}(L_{rse} T s^{-1}) = T r \frac{d}{dt}(T r^{-1} M_{rs}) = -j\omega E_r M_{rs} \quad (VI.47)$$

$$T r \frac{d}{dt}(L_{rsi} T s^{-1}) = T r \frac{d}{dt}(T r^{-1} M_{rs}) = -j\omega E_r M_{rs} \quad (VI.48)$$

Além disso:

$$T s \frac{d}{dt}(L_{ss} T s^{-1}) = L_{ss} T s \frac{d}{dt}(T s^{-1}) = -j\omega E_s L_{ss} \quad (VI.49)$$

$$\text{Tr } d/dt(\mathbb{L}_{rre}\text{Tr}^{-1}) = \mathbb{L}_{rre} \text{Tr } d/dt(\text{Tr}^{-1}) = -j\omega E_r \mathbb{L}_{rre} \quad (\text{VI.50})$$

$$\text{Tr } d/dt(\mathbb{L}_{rri}\text{Tr}^{-1}) = \mathbb{L}_{rri} \text{Tr } d/dt(\text{Tr}^{-1}) = -j\omega E_r \mathbb{L}_{rri} \quad (\text{VI.51})$$

$$\text{Tr } d/dt(\mathbb{L}_{rrei}\text{Tr}^{-1}) = \mathbb{L}_{rrei} \text{Tr } d/dt(\text{Tr}^{-1}) = -j\omega E_r \mathbb{L}_{rrei} \quad (\text{VI.52})$$

$$\text{Tr } d/dt(\mathbb{L}_{rrie}\text{Tr}^{-1}) = \mathbb{L}_{rrie} \text{Tr } d/dt(\text{Tr}^{-1}) = -j\omega E_r \mathbb{L}_{rrie} \quad (\text{VI.53})$$

O sistema de equações com matrizes a coeficientes constantes toma o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{u}_{re} \\ \dot{u}_{ri} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & R_{rre} & R_{rrei} \\ 0 & R_{rrie} & R_{rri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_{re} \\ i_{ri} \end{bmatrix} - j\omega \begin{bmatrix} E_s & & \\ & E_r & \\ & & E_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{L}_{ss} & \mathbb{M}_{sr} & \mathbb{M}_{sr} \\ \mathbb{M}_{rs} & \mathbb{L}_{rre} & \mathbb{L}_{rrei} \\ \mathbb{M}_{rs} & \mathbb{L}_{rrie} & \mathbb{L}_{rri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_{re} \\ i_{ri} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{L}_{ss} & \mathbb{M}_{sr} & \mathbb{M}_{sr} \\ \mathbb{M}_{rs} & \mathbb{L}_{rre} & \mathbb{L}_{rrei} \\ \mathbb{M}_{rs} & \mathbb{L}_{rrie} & \mathbb{L}_{rri} \end{bmatrix} d/dt \begin{bmatrix} i_s \\ i_{re} \\ i_{ri} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.54})$$

#### VI.4 Expressão do Conjugado

$$T_e = i_s^{t*} \frac{d}{d\phi} \mathcal{L}_{sr} i_r = i_s^{t*} \frac{d}{d\phi} \mathcal{L}_{sr} (i_{re} + i_{ri}) \Rightarrow \quad (\text{VI.55})$$

$$T_e = i_s^{t*} \frac{d}{d\phi} \mathcal{L}_{sr} i_{re} + i_s^{t*} \frac{d}{d\phi} \mathcal{L}_{sr} i_{ri} \quad (\text{VI.56})$$

$$T_e = i_s^{t*} \frac{d}{d\phi} \mathbf{A}^{-1} \mathbb{L}_{sr} \mathbf{B} i_r = i_s^{t*} \mathbf{A}^{-1} \frac{d}{d\phi} \mathbb{L}_{sr} \mathbf{B} i_r \quad (\text{VI.57})$$

$$T_e = i_s^{t*} \frac{d}{d\phi} \mathbb{L}_{sr} (i_{re} + i_{ri}) = i_s^{t*} \frac{d}{d\phi} (\mathbf{T} \mathbf{S}^{-1} \mathbb{M}_{sr} \text{Tr}) (i_{re} + i_{ri}) \quad (\text{VI.58})$$

$$T_e = i_s^{t*} \left[ \left( \frac{d}{d\phi} \mathbf{T} \mathbf{S}^{-1} \right) \mathbb{M}_{sr} \text{Tr} + \mathbf{T} \mathbf{S}^{-1} \mathbb{M}_{sr} \left( \frac{d}{d\phi} \text{Tr} \right) \right] (i_{re} + i_{ri}) \quad (\text{VI.59})$$

$$T_e = i_s^{t*} \left[ (-jE_s T_s^{-1}) M_{sr} T_r + T_s^{-1} M_{sr} (jE_r T_r) \right] (i_{re} + i_{rl}) \quad (VI.60)$$

$$T_e = j i_s^{t*} T_s^{-1} \left[ -E_s M_{sr} + M_{sr} E_r \right] T_r (i_{re} + i_{rl}) \quad (VI.61)$$

$$T_e = j i_s^{t*} \left[ -E_s M_{sr} + M_{sr} E_r \right] (i_{re} + i_{rl}) \quad (VI.62)$$

$$T_e = j i_s^{t*} M_T (i_{re} + i_{rl}), \quad (VI.63)$$

onde  $M_T = M_{sr} E_r - E_s M_{sr}$ , como na máquina de gaiola simples.

O sistema de equações da máquina de dupla gaiola em variáveis de coeficientes constantes é mostrado na Figura VI.8. Para anéis independentes a matriz de resistências mútuas (Expressão VI.15) se torna nula e a matriz de dispersão mútua também fica diferente nos dois casos. Para anéis comuns os elementos são da forma  $2I_a + C_k I_{be1} + m L_r$  como na Expressão (VI.37), enquanto para anéis independentes eles são modificados para  $C_k I_{be1} + m L_r$ .

## VI.5 Conclusões

A estrutura da máquina trifásica de gaiola dupla foi apresentada neste capítulo. Os novos aspectos físicos foram considerados e o desenvolvimento da modelagem foi realizado através de uma adaptação do modelo da máquina trifásica. Sob o ponto de vista topológico, as gaiolas se apresentam para os enrolamentos do estator de maneira exatamente equivalente enquanto passam a apresentar novas relações entre elas mesmas. Estas foram as causas do aparecimento das matrizes de resistências e indutâncias mútuas entre as duas gaiolas. O tratamento do processo de solução das equações é essencialmente o mesmo e uma vez concluída a estrutura matemática da modelagem, no próximo capítulo passar-se-á à discussão do cálculo de parâmetros.





## CAPÍTULO VII

### PARÂMETROS DA MÁQUINA DE INDUÇÃO

#### VII.1 Introdução

A quase totalidade da literatura de máquinas elétricas trata a teoria da máquina de indução através de duas metodologias clássicas: a dos circuitos equivalentes do tipo T (Alger, 1965), (Jones, 1967), (Kostenko e Piotrovsky, 1969) e (Fitzgerald, Kingsley e Kusko, 1975) e a dos circuitos acoplados (White e Woodson, 1959), (Majmudar, 1965) e (Barbi, 1985). Apesar das equações de circuitos acoplados serem resultados naturais na introdução dos conceitos de conversão de energia, a primeira metodologia é a mais usada. Isto se deve à simplicidade dos circuitos utilizados e à forma muito prática de se obter parâmetros, efetuando os ensaios a vazio e de rotor bloqueado.

Quando se utiliza a teoria de circuitos acoplados, os parâmetros de indutâncias dos modelos são calculados por fórmulas simplificadas a partir da caracterização dos fluxos totais e fluxos mútuos dos enrolamentos da máquina, não havendo destaques para os fluxos de dispersão. As fórmulas para indutâncias próprias e mútuas são deduzidas a partir dos circuitos magnéticos formados pelas estruturas das máquinas e das ondas de força magnetomotriz produzidas pelos enrolamentos, exigindo sempre um número muito grande de aproximações (White e Woodson, 1959) e (Smolensky, 1982). Esses modelos, que são mais empregados para simulação dinâmica, são quase sempre utilizados para análise de comportamento das grandezas elétricas ou eletromagnéticas, visando-se caracterizar as formas e estilos sem uma preocupação prioritária com a precisão dos resultados.

Contrariamente, nos modelos do tipo T, a maior importância é dada exatamente para as indutâncias de dispersão. Mostra-se que a dispersão magnética pode ocorrer por diversos motivos e em vários pontos de uma máquina elétrica, apresentando-se, conseqüentemente, variadas fórmulas para o cálculo de cada uma delas (Veinott, 1959), (Alger, 1965) e (Kuhlmann, 1965). Nestes casos, costuma-se sempre destacar a precisão dos resultados para pontos de operação específicos, dedicando observações menos rígidas para aspectos de curvas representativas de comportamento.

Os resultados, tanto para o caso da indutância mútua nos circuitos acoplados como da indutância de magnetização para circuitos do tipo T, mesmo com as aproximações incluídas, são indiscutivelmente bons, desde que se considere a saturação e o ranhuramento do entreferro. A vantagem dos circuitos acoplados é ter a totalidade das correntes e tensões elétricas explicitamente representadas nos modelos, enquanto os fenômenos de fluxos de dispersão, da forma como são representados, não ficam verdadeiramente caracterizados.

Os fluxos de dispersão não se comportam exatamente como os fluxos de magnetização e, para que o comportamento da máquina seja estudado com maior fidelidade, deve-se dar tratamento particularizado para cada tipo de dispersão. Assim, no modelo de circuitos acoplados, aqui apresentado, a dispersão é tratada como nos modelos de circuitos equivalentes do tipo T. Considera-se que o fluxo total produzido por um enrolamento é composto por fluxo de entreferro e fluxos de dispersão. O fluxo de entreferro, como o próprio nome já diz, é definido como sendo todo o fluxo que atravessa o entreferro, ficando o fluxo de dispersão formado pelos fluxos de dispersão de ranhura, de cabeça de bobina e de dispersão zig-zag. Parte do fluxo de entreferro se constitui do fluxo mútuo e de alguma dispersão restante (inclinação e cinta), que não será tratada de forma isolada neste estudo.

Essa divisão entre fluxos é oportuna, já que o fluxo que atravessa o entreferro (mútuo ou não) possui um comportamento particular em relação ao ranhuramento e à saturação magnética, completamente diferente do comportamento dos demais fluxos de dispersão.

Do fluxo de entreferro deduz-se as fórmulas para indutâncias próprias e mútuas, como as que foram mostradas no desenvolvimento do sistema de equações originais da máquina (Capítulo II), faltando apenas caracterizar os efeitos de saturação magnética e de ranhuramento do entreferro. Algumas formas de cálculo para os demais parâmetros, relativos aos fluxos de dispersão, são apresentadas neste capítulo.

O interesse na pesquisa de cálculo de parâmetros feita para este trabalho não foi o de melhorar a precisão e sim, o de investigar métodos que apresentem um grau de segurança razoável, fazendo com que as discrepâncias observadas sejam analisadas através da crítica sobre a estrutura matemática dos modelos e sobre os métodos de ensaios empregados. Empregar métodos super elaborados, usando técnicas modernas, como o de elementos finitos ou processos iterativos dispendiosos, computacionalmente falando, "pode" não adiantar muito se nas simulações ainda estiverem presentes erros e imprecisões numéricas de difícil observação e controle.

O objetivo principal é a comprovação dos modelos matemáticos propostos e,

em segundo lugar, virão possíveis contribuições ao estudo de métodos de cálculo de parâmetros. Por este motivo, os parâmetros empregados nos modelos foram calculados pelos métodos tradicionais e, paralelamente, foram investigadas algumas alternativas de cálculo já estudadas por outros autores e que são comentadas ao longo desse capítulo.

Para as simulações optou-se por utilizar as fórmulas tradicionais, porque elas são suficientes para a obtenção de bons resultados nas simulações e não dispendem esforços computacionais adicionais. Além disso, a avaliação das distorções dos resultados seria muito mais complicada, se houvesse a necessidade de analisar mais de uma fonte de erros.

## VII.2 Resistências

As fórmulas usadas pela maioria dos autores, para o cálculo de resistências, são semelhantes entre si e se baseiam na fórmula usual para resistência de condutores sólidos. Considera-se sempre a variação com a temperatura e quase sempre uma correção devido ao efeito de penetração de fluxo.

### Resistência do estator

Com fórmulas apresentadas em quase todas as literaturas do gênero (Veinott, 1959) e (Kuhlmann, 1965), o cálculo deste parâmetro não se constitui em ponto de questionamento, apresentando sempre resultados satisfatórios seja qual for a fonte consultada. Além disso, de posse da máquina, ela pode ser determinada também por ensaio.

Sua fórmula geral (Veinott, 1959), calculada por fase, pode ser:

$$R = (LMC)(C/q)\rho_e, \quad (VII.1)$$

onde: LMC é o comprimento médio dos condutores,

C é o número total de condutores em série por fase,

q é o número de caminhos paralelos e

$\rho_e$  é a resistividade do condutor por unidade de comprimento.

O valor de LMC pode ser calculado pela expressão:

$$LMC = l_e + \frac{\pi D_e \gamma_p}{S_1} (ACT), \quad (VII.2)$$

onde:  $l_e$  é o comprimento do pacote do estator,

ACT é o lance médio ponderado das bobinas em número de ranhuras,

$S_1$  é o número de ranhuras do estator,

$\gamma_p = 1,3$  para máquinas de 2 pólos, 1,5 para 4 pólos e 1,7 para 6 pólos

e  $D_e = D_1 + d_1 + d_{10} + d_{11}$  é o diâmetro médio entre centros das ranhuras de uma bobina,

sendo:  $D_1$  o diâmetro do furo do estator e  $d_1$ ,  $d_{10}$  e  $d_{11}$  as dimensões mostradas na Figura VII.1.

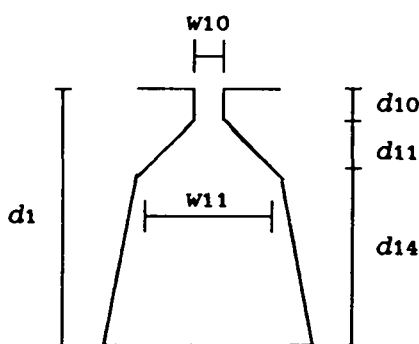


Figura VII.1 Dimensões da ranhura

### Resistência das Barras

O modelo em estudo exige que o valor da resistência individual de cada barra seja calculada. A fórmula utilizada é a da resistência de um condutor sólido, sendo considerado ainda um fator de correção, devido ao efeito de penetração de fluxo (Veinott, 1959), (Kuhlmann, 1965), (Kostenko e Piotrovsky, 1969), (Fuchs, Poloujadoff e Neal, 1988) e (Kassick, 1990).

$$r_b = \rho_b \frac{\ell_b}{S_b} K_r, \quad (VII.3)$$

onde:  $\rho_b$  é a resistividade do material da barra em  $\Omega \text{ m}$ ,

$\ell_b$  é o comprimento da barra,

$S_b$  é a área da seção transversal da barra e

Kr é o fator de correção devido à penetração de fluxo, cuja fórmula usada por Kostenko e Piotrovsky, (1969), Fuchs, Poloujadoff e Neal, (1988) e por Kassick, (1990) é:

$$K_r = \zeta \frac{[\operatorname{sh}(2\zeta) + \operatorname{sen}(2\zeta)]}{[\operatorname{ch}(2\zeta) - \cos(2\zeta)]}, \quad (\text{VII.4})$$

$$\text{onde: } \zeta = \alpha h \quad (\text{VII.5})$$

$$\text{e } \alpha = \sqrt{\pi \mu_0 s f / \rho b}, \quad (\text{VII.6})$$

sendo:  $\mu_0$  a permeabilidade do ar,

s o escorregamento do rotor em relação ao campo girante e

f a frequência da rede.

Além do uso destes fatores, alguns pesquisadores têm apresentado métodos alternativos para cálculo numérico iterativo da resistência de barra, onde esses efeitos já estão incluídos. Dois métodos são destacados aqui para uma investigação futura mais abrangente em modelos desta natureza:

O trabalho de Dabrowski (1988) apresenta um método para calcular a resistência e a reatância de dispersão da barra incluindo efeitos de penetração de fluxo e distribuição de temperatura. Parte-se das equações diferenciais e das condições de contorno estabelecidas em uma barra isolada e envolvida em um meio ferromagnético, deduzindo-se daí uma equação de Riccati em função da densidade de corrente na barra. A barra é subdividida em camadas onde através das relações de transferência e armazenamento de energia calorífica entre estas camadas e o meio ferromagnético outra equação diferencial é estabelecida.

O sistema de equações diferenciais é resolvido numericamente pela discretização do tempo e da profundidade da barra, dividida em camadas e a resistência é calculada baseada na potência dissipada ao longo de toda barra.

Lazarevic e Skokljcev (1988) apresentam um método mais simples, onde a barra é discretizada em camadas, estabelecendo um circuito cascata composto por resistências e reatâncias elementares dessas camadas. A resistência da barra é determinada através da resistência equivalente do circuito

### Resistência dos Anéis

A resistência de segmento de anel considerada no modelo é calculada normalmente pela mesma fórmula de resistência de condutores sólidos e corrigida pelo conhecido fator Kring, introduzido por Trickey (Veinott, 1959), que leva em consideração a distribuição não uniforme das correntes que se

transferem entre barras e anéis.

$$r_a = \rho_a \frac{\pi D_r}{S_r} K_{ring}, \quad (VII.7)$$

onde:  $D_r$  é o diâmetro médio do anel,

$S_r$  é a área da seção transversal do anel,

$$K_{ring} = p \left(1 - \frac{D_i}{D_r}\right) \frac{1 + (D_i/D_r)^{2p}}{1 + (D_i/D_r)^{2p}}, \quad (VII.8)$$

$\rho_a$  é a resistividade do material do anel em  $\Omega \cdot m$  e

$D_i$  é o diâmetro interno do anel.

Em substituição ao fator Kring, a resistência pode ser calculada com uso de técnicas de elementos finitos. Um método bastante eficiente para calcular a resistência, sem utilizar o fator Kring, foi apresentado por Williamson e Begg, (1986). Neste trabalho, os potenciais complexos são resolvidos pelo método de elementos finitos e depois empregados para calcular o valor da resistência. Eles estabeleceram, também, uma metodologia consistente para medição da resistência através de protótipo, usada para comprovação de resultados, mostrando que o método de cálculo proposto é muito mais eficiente que o uso do Kring de Trickey.

### VII.3 Indutâncias de Dispersão

Das fórmulas utilizadas para indutâncias de dispersão, as de indutância de ranhura não apresentam grandes variações entre os autores clássicos (Veinott, 1959), (Liwschitz, 1964), (Alger, 1965) e (Kuhlmann, 1965). Porém no caso da cabeça de bobina as fórmulas devem ser escolhidas e utilizadas com algum cuidado, devido à dificuldade de obtenção de algumas dimensões físicas exigidas no cálculo. E no caso da indutância zig-zag, que é justificada pela maioria dos autores (Veinott, 1959) como sendo indispensável para se obter bons resultados e, apesar disso, não possui uma perfeita caracterização com os fluxos envolvidos, aconselha-se utilizar as fórmulas mais simples possíveis (Say, 1968).

São muitas as diferenças entre as expressões apresentadas nas referências consultadas. Procurou-se nesse trabalho utilizar as que apresentaram os melhores resultados, sem complicar demasiadamente os cálculos realizados.

As indutâncias de dispersão também podem ser calculadas por métodos de

diferenças finitas (Fuchs, Poloujadoff e Neal, 1988) ou método de elementos finitos (EFCAD/GRUCAD/UFSC). A dispersão de ranhura pode ser avaliada isoladamente por um método de cálculo de campo bidimensional e a dispersão de cabeça de bobina pode ser calculada pelo uso de um programa de cálculo de campos tridimensionais (Carpenter e Locke, 1988), (Lijie e Shanchun, 1988) e (Danilevich e Yakovlev, 1990), (Mesquita, 1990).

#### Indutância de dispersão de ranhura

Como parte do fluxo produzido pelos enrolamentos acaba por se fechar pelas ranhuras, não atravessando o entreferro (Figura VII.2), define-se a indutância de dispersão de ranhura, contabilizando o enlace de fluxo dos condutores do estator em relação a essa parcela de fluxo e dividindo-o pela corrente desses condutores. No rotor, o enlace de fluxo é o próprio fluxo e a indutância calculada é chamada de indutância de dispersão da barra. A indutância de dispersão de ranhura depende da forma e da geometria da própria ranhura.

A fórmula geral para a indutância de ranhura do estator é dada por:

$$l_s = 3 \mu_0 (CK_w)^2 C_x l_e \frac{K_{s1}}{S_1} \quad (\Omega/\text{fase}), \quad (\text{VII.9})$$

onde: C é o número de condutores em série na ranhura,

$K_w$  é o fator de enrolamento,

$C_x$  é o fator de distribuição para dispersão de ranhura (Veinott, 1959) e (Alger, 1965),

$l_e$  é o comprimento útil do estator,

$K_{s1}$  é a constante de ranhura do estator e

$S_1$  é o número de ranhuras do estator.

No caso do rotor:

$$l_b = \mu_0 l_r K_{s2} \quad (\Omega/\text{barra}), \quad (\text{VII.10})$$

onde:  $l_r$  é o comprimento útil de ferro do rotor e

$K_{s2}$  é a constante de ranhura do rotor.

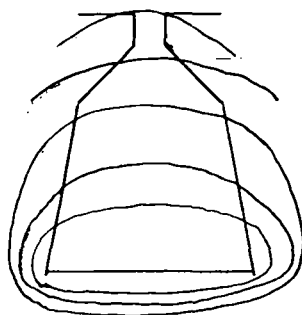


Figura VII.2 - Fluxo de dispersão de ranhura

A influência da geometria da ranhura é dada pela constante de ranhura. Várias formas de ranhura e as correspondentes expressões para cálculo das constantes são apresentadas em muitas das referências mencionadas ao final deste trabalho (Veinott, 1959 ), (Liwschitz, 1964) e (Alger, 1965).

A indutância da barra ainda deve ser corrigida, devido ao efeito de penetração de fluxo (Kostenko e Piotrovsky, 1969), (Fuchs, Poloujadoff e Neal, 1988) e (Kassick, 1990) e devido ao efeito de saturação em ranhuras fechadas (Veinott, 1959 ).

$$K_x = \frac{3}{2 \zeta} \frac{[\text{sh}(2\zeta) - \text{sen}(2\zeta)]}{[\text{ch}(2\zeta) - \cos(2\zeta)]} \quad (\text{VII.11})$$

Assim como a resistência da barra, a reatância de dispersão também pode ser obtida através do trabalho de Dabrowski (1988) ou pelo trabalho de Lazarevic e Skokljjevic (1988).

#### Indutância de cabeça de bobina

Fora dos núcleos de ferro do estator e do rotor, os fluxos estabelecidos pelas cabeças de bobina e pelos anéis de curto-circuito estão praticamente contidos no ar. A carcaça da máquina, neste caso, atua como uma blindagem magnética não permitindo que o fluxo saia desta região. Modelar esta região para calcular os caminhos magnéticos se constitui em tarefa complexa e ingrata, pois não há como comprovar todo este trabalho.

Algumas fórmulas são apresentadas na literatura tradicional como resultados de pesquisas particulares (Liwschitz, 1964), (Kuhlmann, 1965) e (Alger, 1965). Estas fórmulas apresentam diferenças tão grandes entre si que



trazem certa insegurança para quem as utiliza.

Neste trabalho, optou-se por utilizar as fórmulas de Kuhlmann (1965) por apresentarem os resultados mais coerentes nos exemplos das referências consultadas e por não exigirem correções adicionais.

Para o estator:

$$l_{cb1} = \frac{3 C^2 0.315 K_w^2}{2\pi \times 10^7 P} \left[ b + 0.5(f_c + d_l/2) \right] (\Omega/\text{fase}), \quad (\text{VII.12})$$

onde: C é o número de condutores em série por fase,

$K_w$  é o fator de enrolamento,

P é o número de polos e

b,  $f_c$  e  $d_l$  são indicados na Figura VII.3, todos em cm.

Para o rotor:

$$l_{cb2} = \frac{m \times 0.158}{2\pi \times 10^7 p^2} \left[ 2p b_r + \frac{\pi D d_c}{1.7w_{er} + 1.2d_{er} + 1.4d_c} \right] \left[ 4 \sin^2 \frac{2\pi}{m} \right] \Omega/\text{seg. anel}, \quad (\text{VII.13})$$

onde: m é o número de barras,

D é o diâmetro médio no entreferro,

$d_c$  é a distância radial da circunferência média do anel até o centro da parte reta da ranhura do estator e

$b_r$ ,  $w_{er}$  e  $d_{er}$  são indicados na Figura VII.3 e usados em cm.

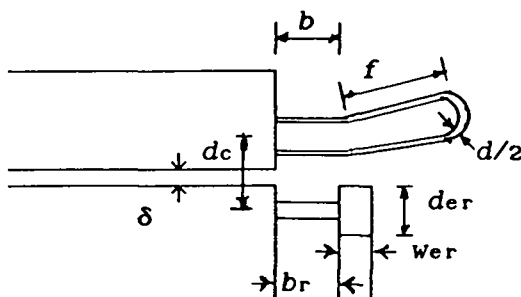


Figura VII.3 - Dimensões da cabeça de bobina

#### VII.4 Indutâncias Próprias e Mútuas

As fórmulas básicas para cálculo das indutâncias próprias e mútuas já foram apresentadas anteriormente (Eq II.9, II.10, II.17, II.18 e II.32). É claro que a utilização destas fórmulas no modelo não pode trazer resultados próximos do real desempenho da máquina, pois alguns fenômenos importantes não estão incluídos nelas.

No desenvolvimento destas expressões o entreferro foi considerado como formado por duas superfícies lisas, desconsiderando-se assim as aberturas das ranhuras, cujos efeitos não podem ser desprezados. A introdução do conhecido **Coefficiente de Carter** faz a correção do comprimento do entreferro (Liwschitz, 1964), mas efeitos como o das harmônicas de ranhura, que não são tratados neste modelo, devem ser analisados em estudos específicos.

Assim:

$$\delta' = \delta K_c, \quad (\text{VII.14})$$

$$\text{onde: } K_c = K_{\text{cest}} \times K_{\text{crot}}, \quad (\text{VII.15})$$

$$\text{sendo: } K_c = \frac{\lambda_1 (5\delta + w_{10})}{\lambda_1 (5\delta + w_{10}) - w_{10}^2} \text{ para ranhuras abertas,} \quad (\text{VII.16})$$

$$K_c = \frac{\lambda_1 (5\delta + w_{10})}{\lambda_1 (5\delta + w_{10}) - w_{10}(\delta + w_{10})}, \quad (\text{VII.17})$$

para ranhuras parcialmente fechadas considerando 20% de espraiamento de fluxo e

$$K_c = \frac{\lambda_1 (5\delta + w_{10})}{\lambda_1 (5\delta + w_{10}) - w_{10}(0,5\delta + w_{10})} \text{ para 10\% de espraiamento} \quad (\text{VII.18})$$

onde:  $\delta$  é o comprimento do entreferro,

$w_{10}$  é a largura da boca da ranhura e

$\lambda_1$  é o passo de ranhura em unidades de comprimento.

Outro fenômeno não considerado nas fórmulas de indutâncias próprias e de indutâncias mútuas é o da saturação magnética.

Sendo o material ferromagnético considerado de permeabilidade infinita, a queda de força magnetomotriz utilizada para a dedução destas fórmulas é considerada concentrada, somente, no entreferro. Porém, por maior que seja a

permeabilidade e, mesmo trabalhando na região linear da curva de magnetização, sempre existirá queda de força magnetomotriz no ferro da máquina e, ao considerar-se essa queda, as reatâncias próprias e mútuas da máquina terão seus valores reduzidos.

A queda de força magnetomotriz nas partes de ferro é aumentada com a saturação magnética e com a redução da permeabilidade na parte linear da curva. Por isso, é prática corrigir a reatância da máquina através do chamado fator de saturação (Agarwal e Alger, 1960), (Kuhlmann, 1965) e (Levi, 1984). Esse fator é expresso pela razão entre a queda de força magnetomotriz total e a queda de força magnetomotriz no entreferro e deve ser introduzido no denominador das expressões de todas as indutâncias relacionadas a fluxos que atravessem o entreferro da máquina.

$$FSM = \frac{\sum \Delta F_{mmfe} + \Delta F_{mmar}}{\Delta F_{mmar}} \quad (VII.19)$$

A distribuição da força magnetomotriz na máquina deve ser calculada usando-se a geometria da seção transversal da máquina e a curva de magnetização do material ferromagnético utilizado nas chapas. O resultado deste cálculo mostrará se a máquina trabalha saturada ou não.

Como as tensões induzidas e as correntes variam conforme o ponto de operação da máquina, variará também a distribuição de força magnetomotriz, o fator de saturação e as indutâncias próprias e mútuas da máquina, devendo estas variações ser incluídas na modelagem para o regime transitório em que a máquina estiver envolvida.

#### Reatância de dispersão zig-zag

Foi utilizada a fórmula sugerida por Alger (1965):

$$X_z = \frac{X_m \pi^2}{12} \left[ \frac{P^2}{S_1^2} + \frac{P^2}{S_2^2} \right] \quad (VII.20)$$

### VII.5 Obtenção de Reatâncias por Cálculo de Campo

#### VII.5.1 Cálculo de campo bidimensional

O uso dos métodos de diferenças finitas ou de elementos finitos para cálculo de campos bidimensionais já pode ser considerado como corriqueiro no meio científico, sendo utilizado por pesquisadores para cálculo de parâmetros

das máquinas elétricas ou, alternativamente, na solução conjunta com as demais equações diferenciais (Fuchs, Poloujadoff e Neal, 1988), (Arkkio e Hauru, 1988), (Preston, Reece e Sangha, 1988), (Williamson, Lim e Robinson, 1990), e (Kassick, Huang, Davat e Lajole-Mazenc, 1990). Através de programas dedicados para máquinas elétricas (EFMAQ e DIFIMEDI) é possível obter-se a distribuição dos potenciais magnéticos ou das linhas de fluxo em uma estrutura qualquer, contendo fontes de correntes e, com isso, calcular reatâncias próprias e mútuas de máquinas elétricas, sem muita dificuldade.

Para cálculos de reatâncias de dispersão específicas, as estruturas eletromagnéticas podem ser estudadas através de programas de aplicações mais gerais. Abaixo são mostrados dois exemplos de cálculo de campo através do Programa EFCAD, criado e distribuído pelo GRUCAD da Universidade Federal de Santa Catarina.

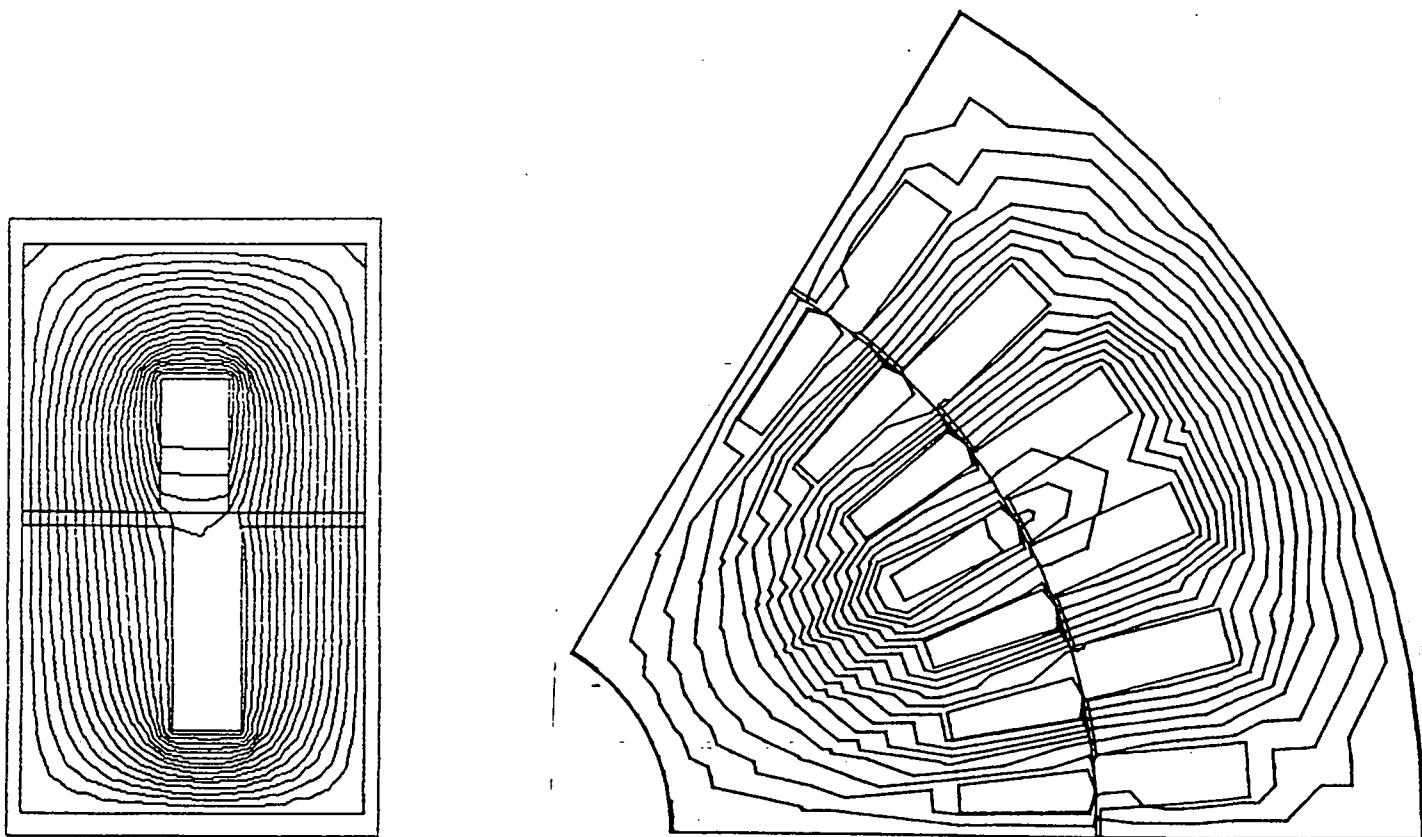


Figura VII.4 - Linhas de campo calculadas por programa de elementos finitos bidimensionais (Calculado pelo EFCAD/GRUCAD/UFSC)

### VII.5.2 Cálculo de campo tridimensional

O cálculo da impedância de cabeça de bobina é realizado normalmente baseado em aproximações da distribuição de campo, que por sua vez dependem da geometria do núcleo, da carcaça e dos condutores. A partir destas aproximações, pode-se chegar a fórmulas explícitas para o cálculo da impedância como já o fizeram outros autores (Veinott, 1959), (Liwschitz, 1964), (Kuhlmann, 1965), (Alger, 1965), (Say, 1968). Ainda que estas fórmulas sejam aproximações simplificadoras, elas têm sido aplicadas com bons resultados quando utilizadas em modelos de circuitos equivalentes, onde todos os tipos de reatância de dispersão são somados para formar apenas uma reatância de dispersão do estator. Nesta forma de emprego, todas as fórmulas de reatância de cabeça de bobina, quando comparadas entre si, apresentam resultados numéricos bastante próximos.

Poder-se-ia pensar em obter-se fórmulas mais precisas para o cálculo desta impedância. Porém, mesmo que se consiga uma forma de representar a distribuição de campo ou a geometria da máquina com maior fidelidade, ainda assim o problema não estaria resolvido. Tudo isto porque cada fabricante tem o seu próprio projeto e cada um deles utiliza a fórmula que acha mais adequada para o cálculo. Não havendo outra maneira melhor, pode-se partir para esse caminho, e talvez se encontre fórmulas que, com algumas variações de alguns parâmetros, se encaixe no cálculo da impedância para cada projeto existente.

Na verdade, a própria tentativa de se representar, através de fórmulas algébricas, efeitos não lineares, como a distribuição de campo, já se constitui em uma aproximação com grande possibilidade de erro. Esta prática foi muito empregada no passado, por não se possuir ferramentas que pudessem executar com rapidez cálculos mais apurados em estudos com este tipo de problema. Assim, o que parece coerente, no caso da reatância de cabeça de bobina, é fazer uso das fórmulas semi-empíricas existentes ou de programas dedicados com métodos modernos e avançados de cálculo de campos tridimensionais.

Fazendo uso de um bom "programa", pode-se representar a geometria de uma máquina com bastante fidelidade e calcular a distribuição de campo na cabeça de bobina com igual rigor. O problema do cálculo da impedância de cabeça de bobina irá se resumir em calcular o enlace total de fluxo na cabeça de bobina.

A proposta aqui apresentada consiste no cálculo da distribuição do fluxo magnético no espaço que envolve a cabeça de bobina, usando um programa de cálculo de campo tridimensional por elementos finitos e no cálculo do enlace de fluxo total da bobina representada por uma estilização geométrica

simplificada.

A representação da máquina é padronizada sob a forma cilíndrica como é mostrada na Figura VII.5. A carcaça é uma casca cilíndrica perfeita, não possuindo reentrâncias nem furos. O estator e o rotor também são peças cilíndricas, sendo representadas as ranhuras apenas no estator, onde se vai medir a impedância. As ranhuras são setores situados entre duas circunferências, a primeira com o raio interno do estator e a outra com o raio do fundo das ranhuras da máquina. A área real da ranhura delimitará o ângulo de abertura da ranhura.

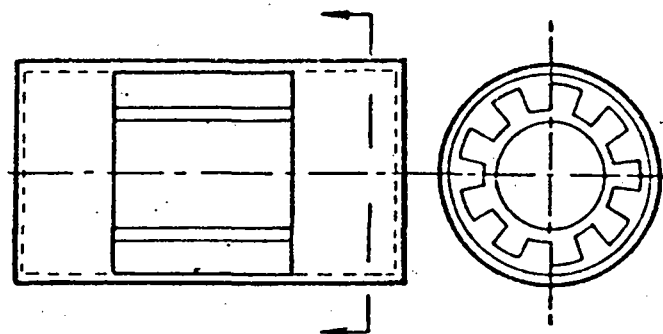


Figura VII.5 - Representação padrão da máquina de indução.

A bobina é representada como um condutor sólido (Figura VII.6) com a forma igual a das ranhuras nas partes paralelas ao eixo da máquina e com seção retangular na parte superior em forma de arco. A área da seção transversal da bobina é a mesma na parte em arco e nas partes retas.

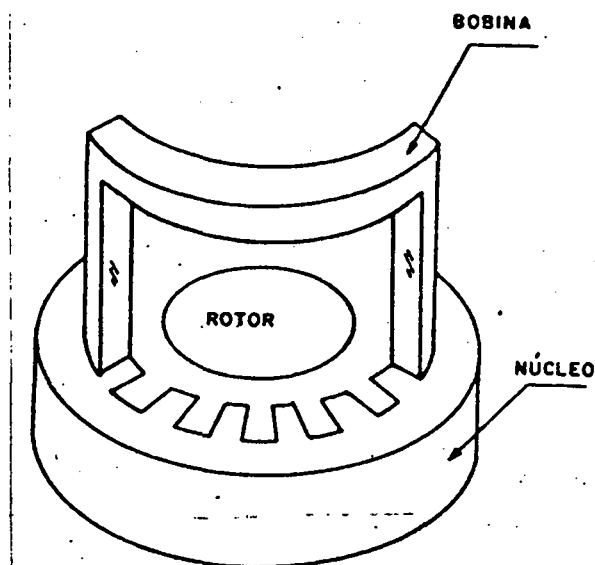


Figura VII.6 Representação da bobina.

### Cálculo de campo:

O cálculo da distribuição dos campos magnéticos é feito utilizando o método de elementos finitos. Utiliza-se a técnica dos dois potenciais escalares: o escalar total e o escalar reduzido (Simkin e Trowbridge, 1979). Neste método o domínio do problema é dividido em duas partes. Na primeira região,  $\Omega_j$ , se encontram todos os condutores de corrente do problema, e o campo magnético é descrito pelo potencial escalar reduzido  $\Phi$  (Mesquita e Bastos, 1989(a)):

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \nabla\Phi \quad (\text{VII.21})$$

onde  $\mathbf{H}_s$  é o campo produzido pelos condutores no espaço de estudos e pode ser calculado por métodos analíticos para algumas configurações de condutores ou por métodos numéricos para configurações mais complexas (Mesquita e Bastos, 1989(b)). Além de condutores, esta região pode conter materiais de baixa permeabilidade.

Na segunda região,  $\Omega_k$ , estão contidos todos os materiais ferromagnéticos de alta permeabilidade e o campo magnético é descrito pelo potencial escalar magnético,  $\Psi$  (Mesquita e Bastos, 1989(a)):

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \Psi \quad (\text{VII.22})$$

Na fronteira  $\Gamma_{kj}$  entre  $\Omega_k$  e  $\Omega_j$  as condições de continuidade dos componentes tangenciais do campo magnético  $\mathbf{H}$  e do componente normal da indução magnética  $\mathbf{B}$  são utilizadas para acoplar os dois potenciais (Mesquita e Bastos, 1989(a)). Para isto, o potencial escalar  $U_s$  é definido, de modo que, em  $\Gamma_{kj}$ :

$$\Phi - \Psi = U_s \quad (\text{VII.23})$$

Isto quer dizer que pode-se encarar o problema total como o cálculo de um potencial escalar magnético descontínuo em  $\Gamma_{kj}$ . O valor do salto de descontinuidade é igual a  $U_s$ . O cálculo de  $U_s$  é feito a partir da equação de continuidade tangencial de  $\mathbf{H}$  em  $\Gamma_{kj}$ :

$$-(\mathbf{H}_s - \nabla\Phi) \cdot \mathbf{t} = -(\nabla\Psi) \cdot \mathbf{t} \quad (\text{VII.24})$$

onde  $\mathbf{t}$  é um vetor unitário tangencial a  $\Gamma_{kj}$ . Esta equação pode ser integrada por um caminho ao longo da interface  $\Gamma_{kj}$ , gerando (Mesquita e Bastos, 1989(a)):

$$\Phi - \Psi = \int H_{st} dl = U_s \quad (\text{VII.25})$$

A continuidade da componente normal de  $B$  é garantida na formulação por elementos finitos, como mostrada no artigo de Mesquita e Bastos, 1989(a).

#### Distribuição de condutores:

O enlace total de fluxo é o somatório dos enlaces de fluxo de cada espira da bobina. A bobina então será dividida em condutores individuais.

A melhor distribuição para os condutores na ranhura é a que realmente existe na máquina, sendo porém de representação quase impossível. Uma representação com distribuição uniforme dos condutores poderia ser adotada no lugar da distribuição real. Porém, neste trabalho, adotou-se uma forma mais simples de representação. Nela não se leva em conta a forma e nem as áreas dos condutores. Cada condutor ficará situado em um ponto de uma malha cartesiana (Figura VII.7). Dentro da ranhura, o número de condutores posicionados nos arcos é proporcional ao comprimento do arco médio da ranhura e o número de condutores posicionado nos raios é proporcional à profundidade da ranhura, sendo o produto dos dois números igual ao inteiro mais próximo do número de condutores realmente existentes na máquina. Com isso, deve-se definir, também, um fator de correção FC para o número de condutores.

$$FC = \frac{\text{núm. de cond. exist. na ranhura}}{\text{núm. de cond. alocados na ranhura}} \quad (\text{VII.26})$$

A distribuição dos condutores na seção transversal da parte da bobina em arco mantém a distribuição já posicionada nos raios e assume uma distribuição uniforme na direção vertical, com o mesmo número de condutores existentes nos arcos da ranhura (Figura VII.7).

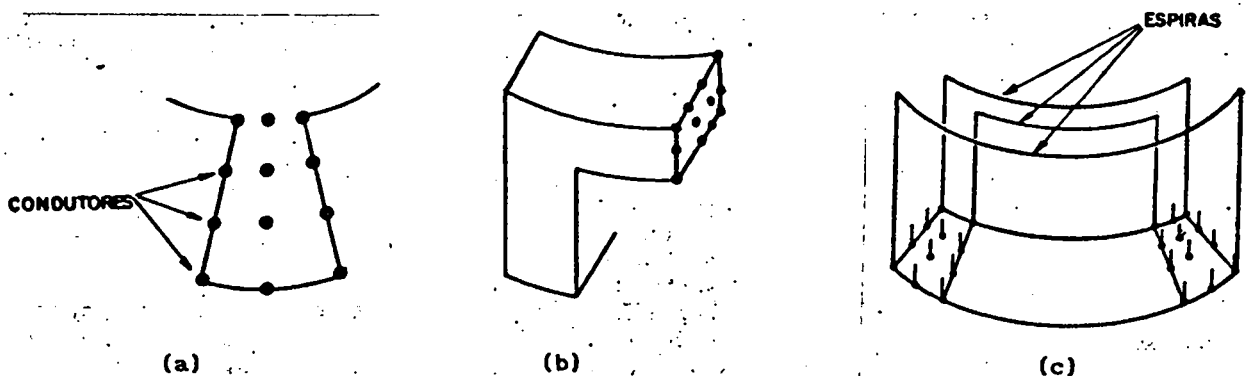


Figura VII.7 Distribuição de condutores na cabeça de bobina.



### Enlace de fluxo:

Com a forma padrão adotada para a bobina, todas as espiras terão a forma mostrada na Figura VII.7 (c) e o fluxo enlaçado por cada espira pode ser calculado através da integral da densidade de fluxo na superfície cilíndrica contornada por ela.

A integral é realizada utilizando-se o Método de Integração de Simpson. A impedância de cabeça de bobina por fase é encontrada através da seguinte expressão:

$$X = \frac{2 FC \omega nbob \lambda}{i}, \quad (VII.27)$$

onde: X é a reatância de cabeça de bobina por fase,  
 FC é o fator de correção do número de condutores,  
 $\omega$  é a frequência do enrolamento em rd/s,  
 nbob é o número de bobinas por fase,  
 $\lambda$  é o enlace total de fluxo da cabeça de bobina e  
 i é a corrente nos condutores da bobina.

### Comprovação do método:

Seja um condutor unifilar reto de comprimento L, conduzindo uma corrente I. Seja P um ponto situado em uma superfície cilíndrica colocada próxima ao condutor como mostra a Figura VII.8.

A densidade de fluxo neste ponto P será dada pela expressão:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4 \pi d} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 + d^2}} + \frac{L - z}{\sqrt{(L - z)^2 + d^2}} \right] \quad (VII.28)$$

Se uma espira (linha pontilhada) é colocada nesta superfície o fluxo enlaçado por ela será:

$$\psi = 2RI \times 10^{-7} \left\{ 2\text{sen}(\alpha_2/2) - 2\text{sen}(\alpha_1/2) - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sqrt{L^2 + 4R^2 \text{sen}^2 \alpha}}{2R \text{sen} \frac{\alpha}{2}} \cos(\alpha/2) d\alpha \right\} \quad (VII.29)$$

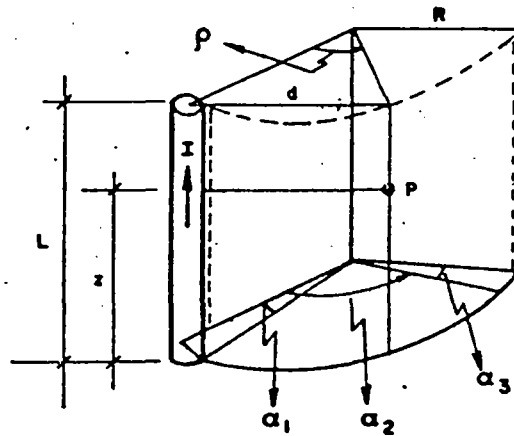


Figura VII.8 Segmento de condutor.

Para um condutor de comprimento  $L = 0,045\text{m}$ , conduzindo uma corrente de  $0,1\text{mA}$  e uma espira de raio  $R = 0,076\text{m}$  com  $\alpha_1 = 0,01^\circ$  e  $\alpha_2 = 89,99^\circ$ , obtém-se para o fluxo enlaçado:

$$\psi = 0,6854 \cdot 10^{-11} \text{ Wb.}$$

Para o cálculo através do método numérico proposto foi considerada uma única espira, da forma padrão, com posicionamento mostrado na Figura VII.8 e com profundidade dos condutores de  $0,1\text{mm}$ , conduzindo a mesma corrente de  $0,1\text{mA}$ , somente em um dos trechos reto. Na parte em arco e no outro trecho reto, a corrente é zero. O valor correspondente para o fluxo, quando calculado com a superfície dividida em uma malha de  $34 \times 34$  para a integração de Simpson foi de:

$$\psi = 0,6792 \cdot 10^{-11} \text{ Wb.}$$

#### Exemplo VII.1

Para exemplo do cálculo da reatância considerou-se a máquina fornecida por Say (1968) páginas 392-396 e cujas dimensões são mostradas no APÊNDICE A. A reatância de cabeça de bobina calculada por Say (1968) para esta máquina tem valor  $6,6\Omega$  por fase. Isto indica que a reatância do estator pode ser tomada como metade desse valor (Alger, 1965). Assim o valor calculado pelo método proposto deveria estar em torno de  $3,3\Omega$ .

Como o método utiliza uma integração numérica, o valor da reatância variará um pouco com a malha escolhida para a integração de Simpson. Esta variação é mostrada na Tabela 1.

Malha para Integração	Reatância [Ω]
2 x 2	0,8069
4 x 4	1,5789
8 x 8	3,3286
12 x 12	3,6784

Tabela VII.1 - Variação da reatância de cabeça de bobina com a malha de integração utilizada.

#### Exemplo VII.2

Um trabalho publicado pelo AIEE(1948) apresenta os valores dos parâmetros de uma máquina calculados por alguns estudiosos do assunto, a título de comparação, cujos dados foram fornecidos pelo AIEE. Os valores encontrados foram tabelados (COMMITTEE AIEE, 1948), extraindo-se somente os valores da reatância de cabeça de bobina, mostrados na Tabela VII.2.

Tabela VII.2 - Reatâncias apresentadas no artigo AIEE, em Ohms.

PLA	ECB	BMC	WHF	TCL	LMN	PHT
3,66	4,10	3,66	4,11	3,96	3,94	2,95

Tabela VII.3 - Variação da reatância de cabeça de bobina com a malha de integração

Malha para Integração de Simpson	Reatância de cabeça de bobina [Ω]
2 x 2	1.3960
6 x 6	2.2280
14 x 14	2.3712

## VII.6 Conclusões

Foi apresentado todo o formulário utilizado nas modelagens das máquinas de indução estudada neste trabalho. Apresentou-se também discussões sobre formas alternativas para o cálculo de alguns parâmetros, destacando-se inovações como o uso do método de elementos finitos para o cálculo de reatâncias e da resistência de segmento de anel, além de métodos iterativos para cálculo de reatância e resistência de barras. Como contribuição, propôs-se uma metodologia para cálculo da reatância de cabeça de bobina, apresentando-se todo o desenvolvimento teórico que é feito a partir da obtenção da distribuição de fluxo na região envolvida. A metodologia foi validada através de comparações com resultados analíticos e sua implementação efetiva ainda ficou dependente, principalmente, de desenvolvimento de programa dedicado de cálculo de campo tridimensional que possa representar, de forma mais realista, todos os enrolamentos envolvidos na região ocupada pela cabeça de bobina.

Os cálculos dos parâmetros das máquinas utilizadas são mostrados no Apêndice B, tendo sido realizados pelos formulários tradicionais. A implementação desses parâmetros nos programas de cálculos é feita através das fórmulas e das dimensões físicas das máquinas, permitindo que a modelagem seja utilizada também para análise de projetos. Completada a modelagem, os resultados, a validação e a sua avaliação são apresentados no capítulo a seguir.

## CAPÍTULO VIII

### RESULTADOS E COMPARAÇÕES

#### VIII.1 Introdução

Este capítulo tem por finalidade apresentar os resultados obtidos através dos modelos estudados para lhes dar validação e mostrar seus potenciais aplicativos. Com as equações dos modelos, foram elaborados programas de simulação em linguagem FORTRAN, possibilitando simular desempenhos das máquinas em regime permanente e regime dinâmico. Os resultados destes programas são apresentados através de curvas de corrente e conjugado em função da velocidade (regime permanente), curvas corrente, velocidade e conjugado em função do tempo (regime transitório de partida) e também pontos característicos de operação tais como, rotor livre e bloqueado.

Os parâmetros utilizados foram calculados segundo as fórmulas usuais apresentadas no Capítulo VII, a partir das características físicas de três máquinas de linha de produção comercial. Os cálculos, propriamente ditos, são mostrados no Apêndice B, assim como os valores finais realmente utilizados nas simulações.

Duas das máquinas utilizadas foram especialmente cedidas pelos seus fabricantes e a máquina de gaiola dupla é um equipamento didático instalado no Laboratório de Máquinas Elétricas e Eletrônica de Potência da Universidade Federal de Santa Catarina, LAMEP/UFSC, sendo a documentação dos motores fornecida pelos fabricantes e apresentada no Apêndice C.

As validações dos modelos são feitas através de comparações entre resultados de simulações e outros obtidos por ensaios (rotor livre, rotor bloqueado, curvas de regime permanente e curvas de partida livre), sendo apresentada no item VIII.2.

No item VIII.3, a qualidade do modelo é avaliada por comparações com resultados de simulações obtidas por um modelo de Park convencional e no item VIII.4 são apresentadas algumas sugestões para possíveis aplicações.

## VIII.2 Validação dos modelos

### VIII.2.1 Ensaio de rotor livre e rotor bloqueado

Foram utilizados sempre que possível os resultados de ensaios dos fabricantes. No caso da máquina monofásica os ensaios foram refeitos para confirmação da temperatura de ensaio e também para obtenção da corrente do enrolamento auxiliar não fornecida pelo fabricante (Apêndice C).

Os resultados de ensaios da máquina de gaiola dupla fornecidos pelo fabricante foram realizados a 50 Hz (Apêndice C), impondo que as simulações fossem realizadas também nesta frequência. Além disso, a máquina foi ensaiada com uma ligação em delta e dois conjuntos de grupos em paralelo, exigindo uma correção numérica nos resultados dos ensaios para comparação com os resultados simulados, calculados em estrela e com todos os grupos em série.

Para facilidade de expressão as máquinas serão doravante denominadas como:

Máquina 1 - Motor trifásico WEG de gaiola única,

Máquina 2 - Motor monofásico KOHLBACH com enrolamento auxiliar de partida,

Máquina 3 - Motor EQUACIONAL com rotor em dupla gaiola.

Tabela VIII.1 Resultados de ensaios da máquina 1.

Temperatura: Estator - 90°C e Rotor - 138°C			
Rotor livre	Simulação	Ensaio	Diferença
Tensão	220 V	220 V	-----
Corrente	1,930 A	1,993	-3,16%

Rotor bloqueado	Simulação	Ensaio	Ensaio
Tensão	220 V	220	-----
Corrente	22,163 A	24,000 A	-7,65%
Conjugado elet.	23,40 Nm	23,54 Nm	-0,59%

Tabela VIII.2 Resultados de ensaios da máquina 2.

Temperatura: Estator - 42°C e Rotor - 70°C			
Rotor livre	Simulação	Ensaio	Diferença
Tensão principal	220 V	220 V	-----
Corrente principal	6,224 A	6,45 A	-3,49%
Tensão auxiliar	110 V	110 V	-----
Corrente auxiliar	aberto	aberto	-----
Rotor bloqueado	Simulação	Ensaio	
Tensão principal	220 V	220 V	-----
Corrente principal	47,057 A	46,63 A	+0,90%
Tensão auxiliar	110 V	110 V	-----
Corrente auxiliar	26,392 A	27,000 A	-2,25%
Conjugado elet.	15,15 Nm	14,40 Nm	+5,21%

Tabela VIII.3 Resultados de ensaios da máquina 3.

Temperatura: Estator - 73°C e Rotor - 113°C			
Rotor livre	Simulação	Ensaio	Diferença
Tensão	440 V	440 V	-----
Corrente	1,923 A	1,894 A	+1,53%
Rotor bloqueado	Simulação	Ensaio	
Tensão	440 V	440 V	
Corrente	18,819 A	19,000 A	+0,95%
Conjugado elet.	67,53 Nm	67,75 Nm	+0,32%

### VIII.2.2 Curvas de regime permanente

As principais curvas de regime permanente para avaliação do modelo são a de corrente e a de conjugado eletromagnético em função da velocidade. Essas curvas são comparadas nos seus valores limites (ponto inicial, ponto final e ponto de conjugado máximo) e para um conjunto de pontos obtidos nos ensaios de carga realizados pelos fabricantes.

A maioria dos limites destas curvas já foi comparada nos ensaio a vazio e rotor bloqueado, restando comparar o ponto de conjugado máximo e alguns pontos da curva de carga.

Os valores de conjugado fornecidos pelo fabricante são medidos no eixo e devem ser corrigidos para comparação com a curva de conjugado eletromagnético calculada. Esta correção é feita levando-se em conta o acréscimo de conjugado no eixo se não houvesse perdas no ferro e rotacionais durante o funcionamento da máquina em carga. Sugere-se corrigir o conjugado medido segundo a seguinte expressão:

$$T_{\text{corrigido}} = T_{\text{medido}} + \frac{\text{perdas}}{\text{velocidade}} \quad (\text{VIII.1})$$

**Máquina 1:**

As curvas de corrente e conjugado em função do escorregamento calculadas por simulação são mostradas nas figuras VIII.1 e VIII.2. Para comparação, os pontos da curva de carga, da partida e o correspondente ao conjugado máximo fornecidos pelo fabricante também são marcados nesta mesma figura.

As perdas no ferro + rotacionais a 100 % da carga calculadas e fornecidas pelo fabricante são iguais a 290 W (Apêndice C).

Tabela VIII.4 Pontos medidos da curva de carga da máquina 1.

velocidade rpm	escor.	corrente	potência	conjugado medido	conjugado corrigido
1616	0,102	5,95	3580	14,50	16,21
1652	0,082	5,05	3000	12,40	14,08
1684	0,064	4,26	2468	10,40	12,04
1713	0,048	3,56	1980	8,30	9,92
1736	0,036	2,97	1540	6,22	7,82
1758	0,023	2,41	1076	4,15	5,73
1778	0,012	2,06	650	2,10	3,66
Condição de conjugado máximo					
velocidade rpm	escor.	corrente	conjugado medido	conjugado corrigido	conjugado calculado
1224	0,32	20,61	24,00	26,26	29,42

\* Calculada pelo fabricante.

Erro máximo de corrente nos pontos analisados: imperceptíveis

Erro máximo de conjugado nos pontos analisados: 12%



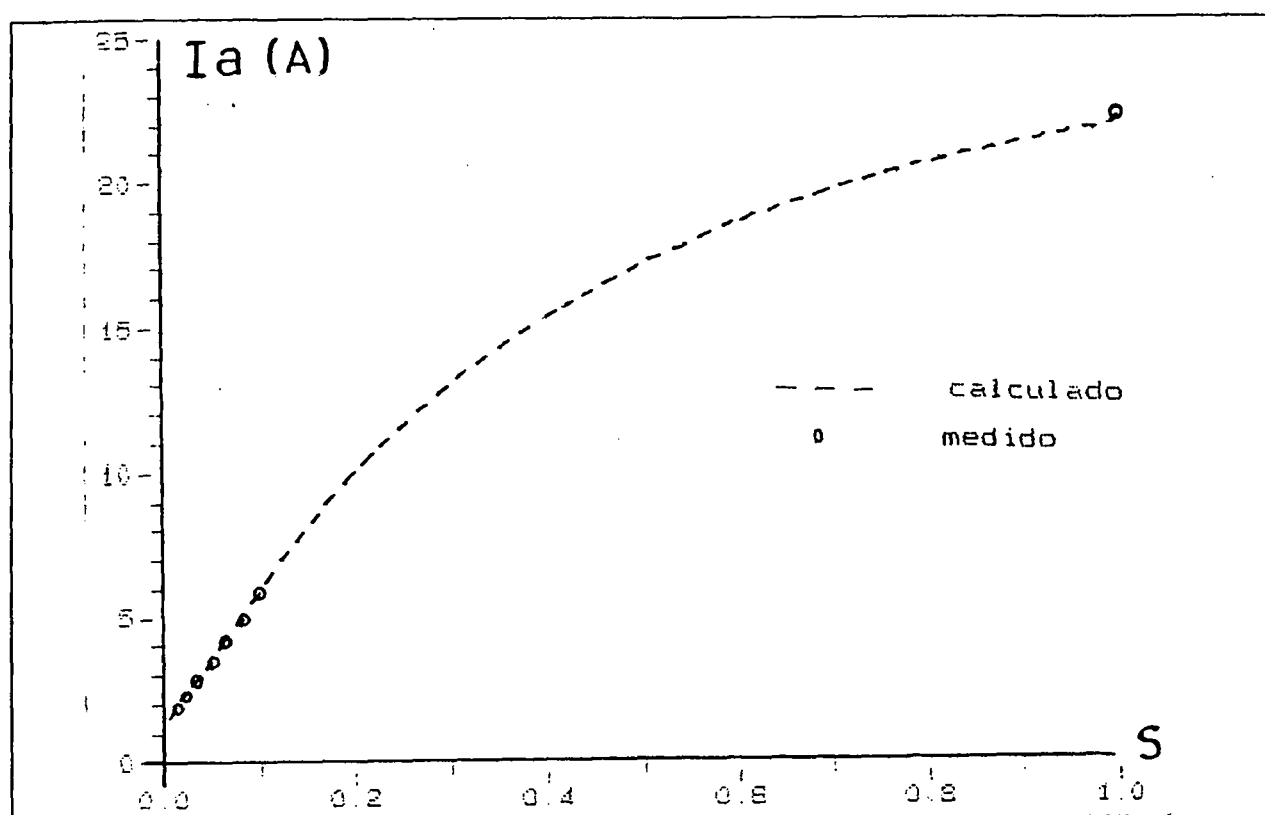


Figura VIII.1 Corrente x escorregamento da máquina 1. Pontos medidos e curva calculada.

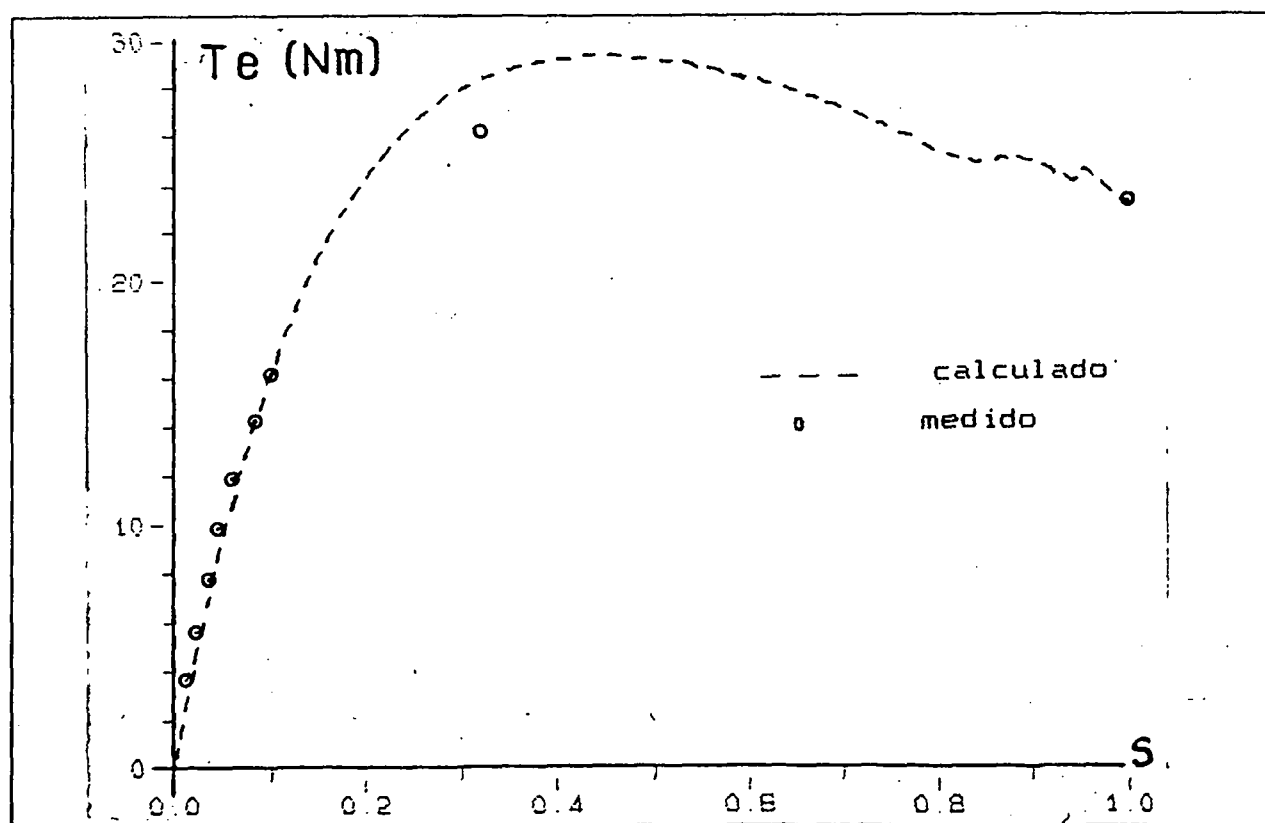


Figura VIII.2 Conjugado eletromagnético x escorregamento da máquina 1.

### Máquina 2:

O procedimento tomado para a máquina 1 é repetido para a máquina monofásica. Nesse caso o fabricante só forneceu 3 pontos da curva de carga.

As perdas no ferro + rotacionais a 100 % da carga calculadas e fornecidas (Apêndice C) pelo fabricante são iguais a 194.1 W.

Tabela VIII.5 Pontos da curva de carga da máquina 2.

velocidade	escor.	corrente	potência	conjugado	conjugado
rpm	rd/s			medido	corrigido
1755	183,78	0,025	9,60	1512	6,1
1765	184,83	0,019	8,40	1212	4,5
1778	186,19	0,012	7,32	912	3,0
Condição de conjugado máximo					
velocidade	escor.	corrente	conjugado	conjugado	conjugado
rpm	rd/s		medido	corrigido	calculado
1548	162,10	0,140	25,80	13,2	14,40
					17,40

Erro máximo de corrente nos pontos analisados: menos que 2%

Erro máximo de conjugado nos pontos analisados: 20,8%

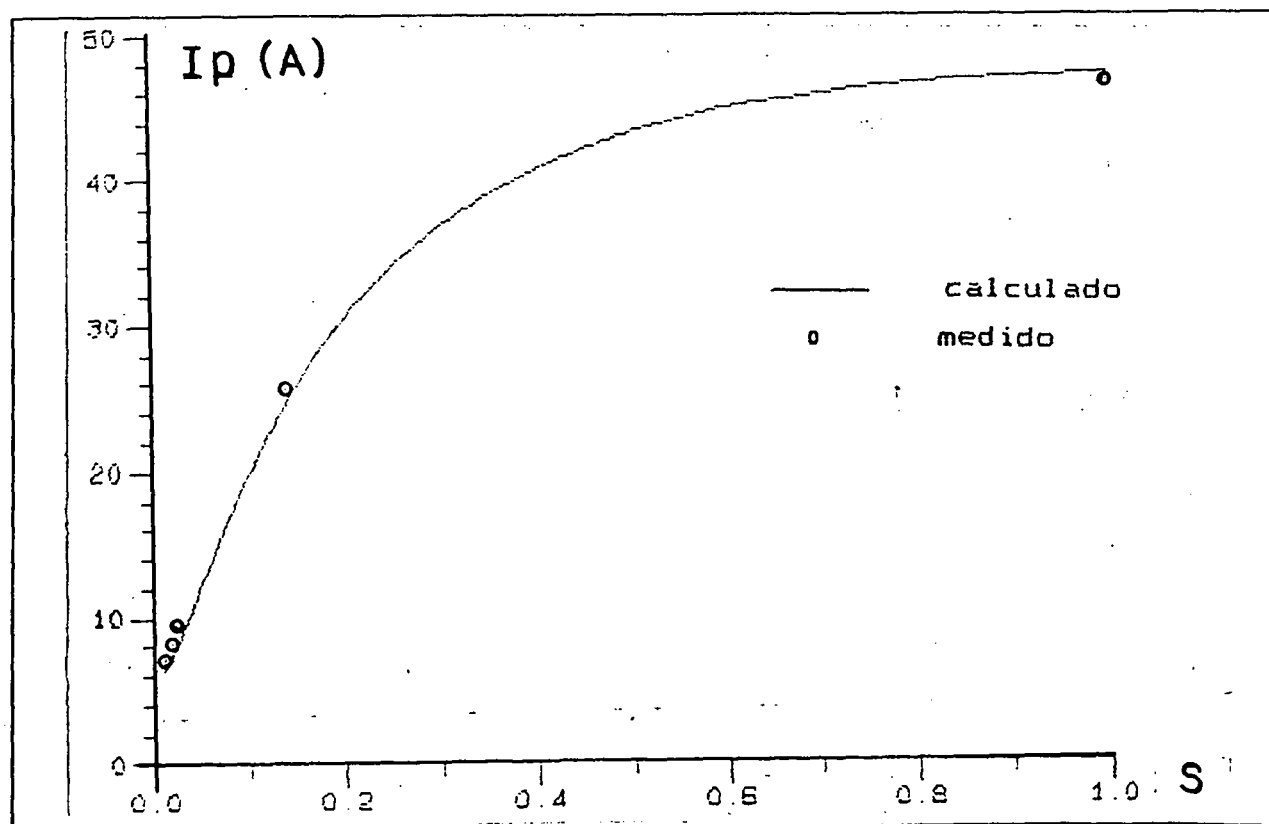


Figura VIII.3 Corrente x escorregamento da máquina 2.

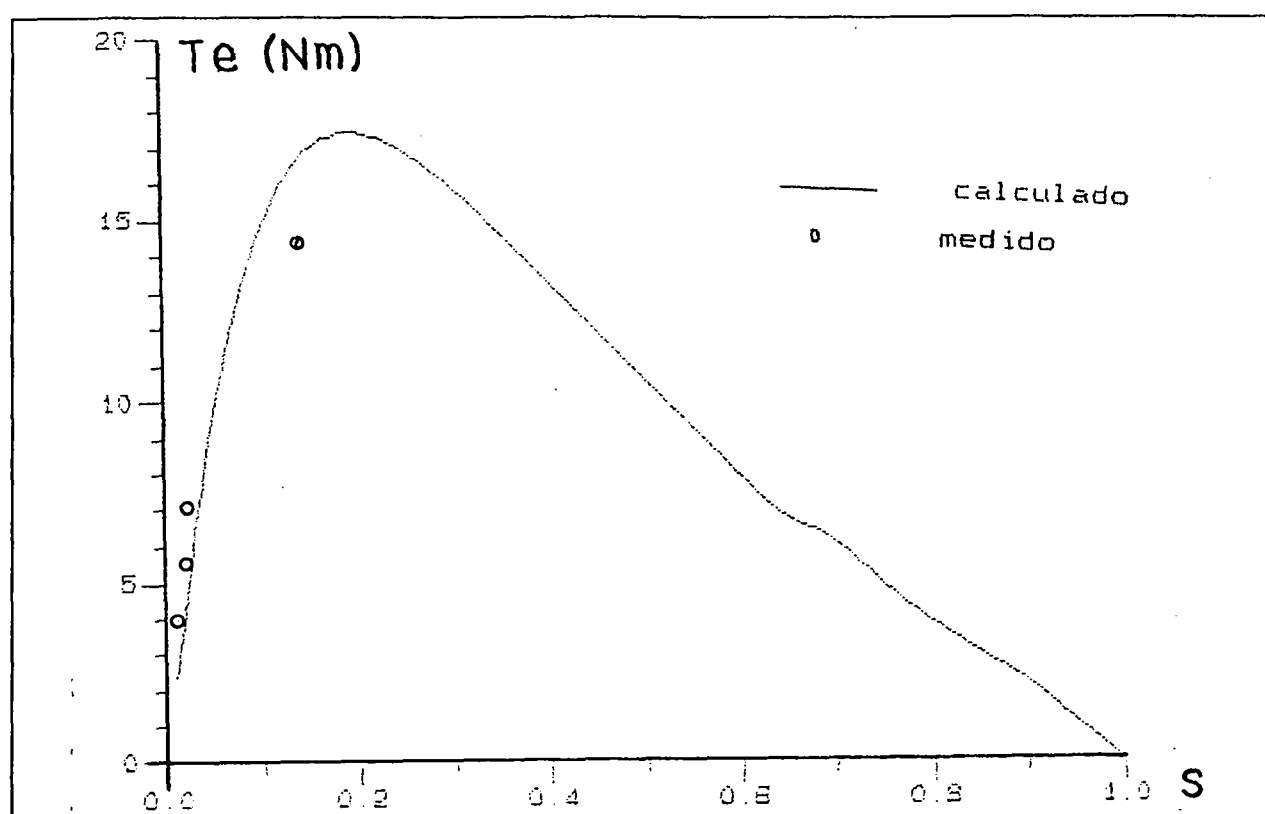


Figura VIII.4 Conjugado eletromagnético x escorregamento em regime permanente da máquina 2, considerando só o enrolamento principal.

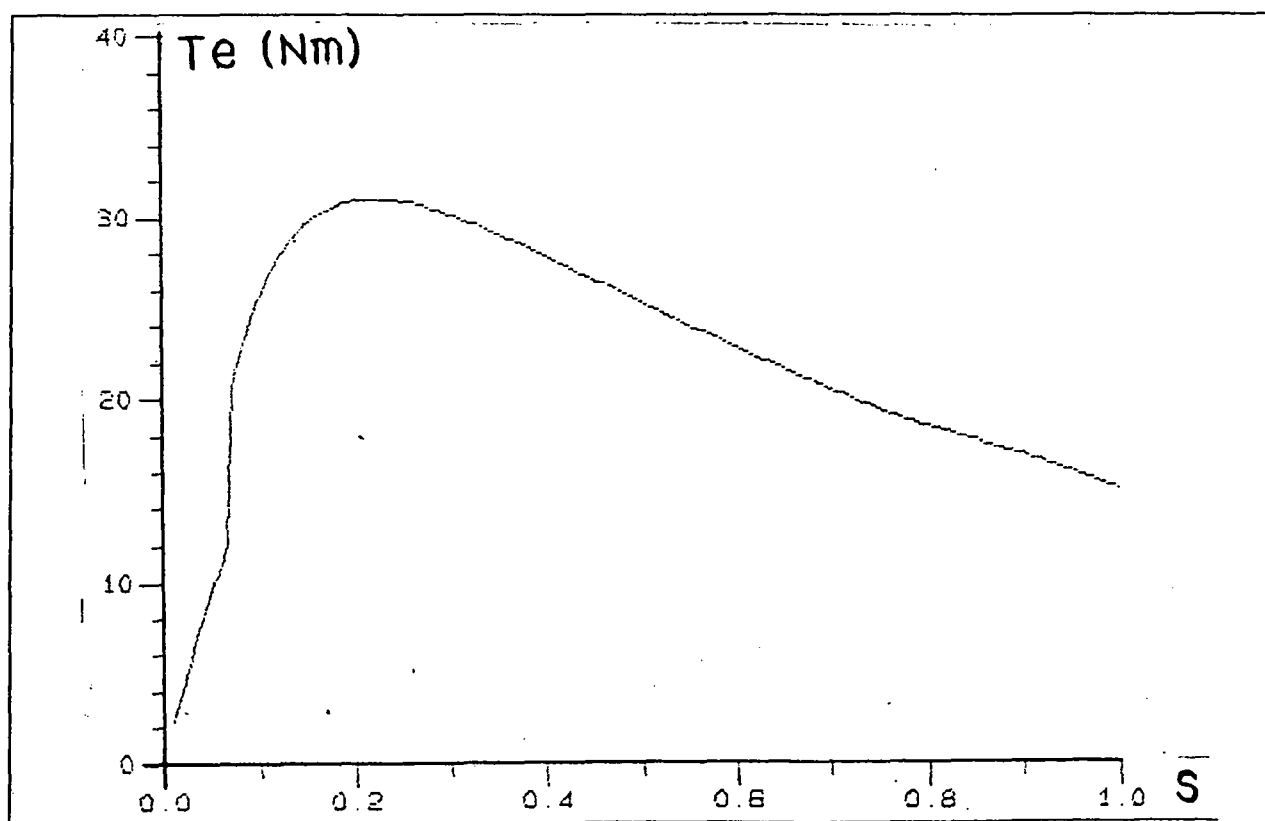


Figura VIII.5 Conjugado x escorreg. da máquina 2 com os dois enrolamentos.

**Máquina 3:**

A máquina de gaiola dupla utilizada pertence ao laboratório de máquinas do departamento de engenharia elétrica da UFSC (LAMEP), tendo sido adquirida para fins didáticos, na implantação do laboratório. A documentação (Apêndice C) fornecida pelo fabricante foi solicitada para esse trabalho e não apresenta detalhes sobre as perdas rotacionais e nem sobre as perdas no ferro para condição de 100% da carga. Por isso, as perdas a vazio é que serão consideradas para correção dos valores de conjugado. Além disso a máquina foi ensaiada pelo fabricante, a vazio e em carga, a 50 Hz, com ligação delta e enrolamentos com uma ligação paralelo, sendo a tabela fornecida pelo fabricante convertida para os valores correspondentes à ligação estrela com todos os enrolamentos em série (440 V).

As perdas a vazio fornecidas são iguais a 272 W (Apêndice C).

Tabela VIII.6 Pontos da curva de carga da máquina 3.

velocidade		escor.	corrente	potência	conjugado	
rpm	rd/s				medido	corrigido
1485	155,51	0,010	1,80	380	0,68	0,68
1465	153,41	0,023	2,14	1480	7,88	9,65
1450	151,84	0,033	2,47	2580	14,99	16,78
1425	149,23	0,050	3,61	3760	22,28	24,10
1410	147,66	0,060	4,53	4970	29,52	31,36
1385	145,04	0,077	5,46	6200	36,27	38,15
1350	141,37	0,100	6,64	7550	43,56	45,48
1325	138,75	0,117	7,22	8150	46,71	48,67

\* O conjugado máximo da máquina 3 não foi fornecido no ensaio do fabricante, podendo ser estimado através da curva de carga fornecida pelo mesmo.

Erro máximo de corrente nos pontos analisados: 15%

Erro máximo de conjugado nos pontos analisados: 15%

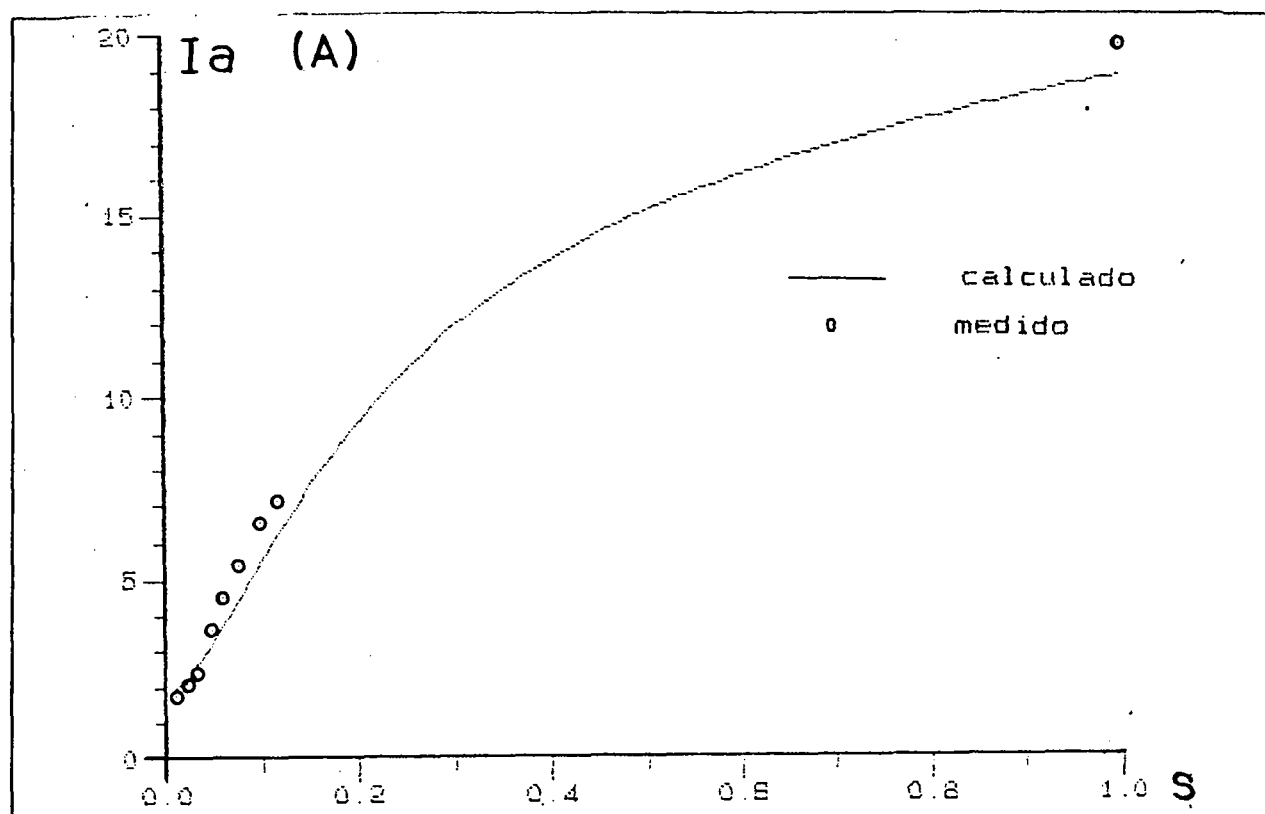


Figura VIII.6 Corrente x escorregamento da máquina 3.

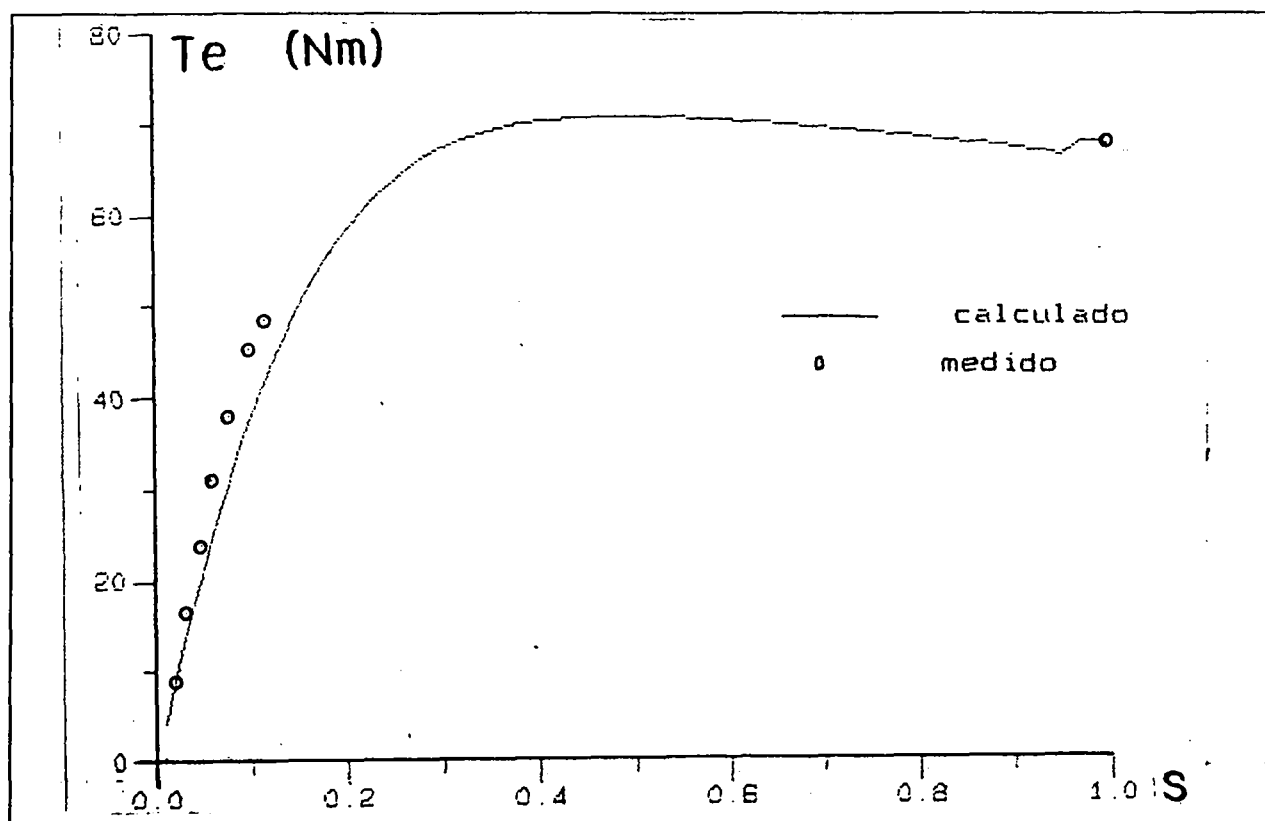


Figura VIII.7 Conjugado eletromagnético x escorregamento da máquina 3.

**Comentários:**

As curvas de regime permanente servem como primeira avaliação dos modelos. Suas formas são de conhecimento geral e os efeitos das harmônicas sobre elas já foram examinadas em trabalhos anteriores. Por isso, a simples observação destas curvas pode dar uma primeira resposta da possível validade do modelo. Levando-se em conta que as perdas rotacionais e no ferro não estão sendo consideradas nos modelos, os conjugados calculados devem dar valores bem acima dos conjugados medidos. Os erros encontrados podem ser considerados perfeitamente aceitáveis, ainda mais, levando-se em conta que as medidas de conjugado máximo são obtidas através da partida da máquina com uso de grande inércia. Esta condição é caracterizada como regime dinâmico, obtendo-se normalmente valores menores que os de regime permanente calculado pelos modelos. Leve-se em conta também que nessas medições a determinação do par de valores (escorregamento, conjugado) é de difícil execução, podendo apresentar erros consideráveis.

Já com a corrente, as diferenças são menores devido ao fato de ser pequena a contribuição de corrente relativa a estas perdas. Ainda assim, as correntes calculadas devem ser menores que as medidas. No caso da máquina 3, maiores diferenças foram encontradas em função da precariedade de informações dos ensaios fornecidos pelo fabricante e da documentação fornecida se referir à máquina original que não é exatamente a mesma instalada no LAMEP/UFSC e sim, uma similar.

**VIII.2.3 Curvas em regime transitório de partida**

Os motores foram ensaiados (LAMEP/UFSC) em condições de partida livre por alimentação direta da rede. Um tacogerador foi utilizado para medição de velocidade, sendo seu sinal, junto com o sinal de corrente, gravados em osciloscópio com memória e transferidos ao microcomputador para posteriormente obter-se o traçado das curvas.

Os cálculos dos parâmetros usados nas equações mecânicas são mostrados a seguir, sendo adotado para o atrito 10 % da inércia da máquina ou do conjunto.

A seguir, as curvas de corrente e de aceleração das três máquinas, resultantes de ensaios e de simulações, são apresentadas. A comparação e a validação pode ser feita visualmente. As curvas de conjugado simuladas são mostradas após as curvas de corrente e aceleração de cada máquina.

Cálculo dos parâmetros da equação mecânica:  $J = 0.5\pi R^4 l \gamma_e$  (VIII.2)

#### Máquina 1:

Inércia do rotor:  $R = 0,04595$  e  $l = 0,09 \Rightarrow J = ,00504 \text{ Kgm}^2$

Inércia do eixo:  $R = 0,015$  e  $l = 0,36 \Rightarrow J = 0,00023 \text{ Kgm}^2$

Inércia do conjunto acoplamento + taco gerador:  $J = 0,00252 \text{ Kgm}^2$

Inércia total:  $J = 0,00779$

Coefficiente de atrito:  $Ba = 0,00051$

#### Máquina 2:

Inércia do rotor:  $R = 0,050$  e  $l = 0,14 \Rightarrow J = ,01100 \text{ Kgm}^2$

Inércia do eixo:  $R = 0,011$  e  $l = 0,34 \Rightarrow J = 0,00006 \text{ Kgm}^2$

Inércia do conjunto acoplamento + taco gerador:  $J = 0,00252 \text{ Kgm}^2$

Inércia total:  $J = 0,01358$

Coefficiente de atrito:  $Ba = 0,001358$

#### Máquina 3:

Inércia do rotor:  $R = 0,075$  e  $l = 0,09 \Rightarrow J = ,03578 \text{ Kgm}^2$

Inércia do eixo:  $R = 0,024$  e  $l = 0,36 \Rightarrow J = 0,00150 \text{ Kgm}^2$

Inércia do conjunto acoplamento + taco gerador:  $J = 0,00748 \text{ Kgm}^2$

Inércia total:  $J = 0,04476 \text{ Kgm}^2$

Coefficiente de atrito:  $Ba = 0,004476$

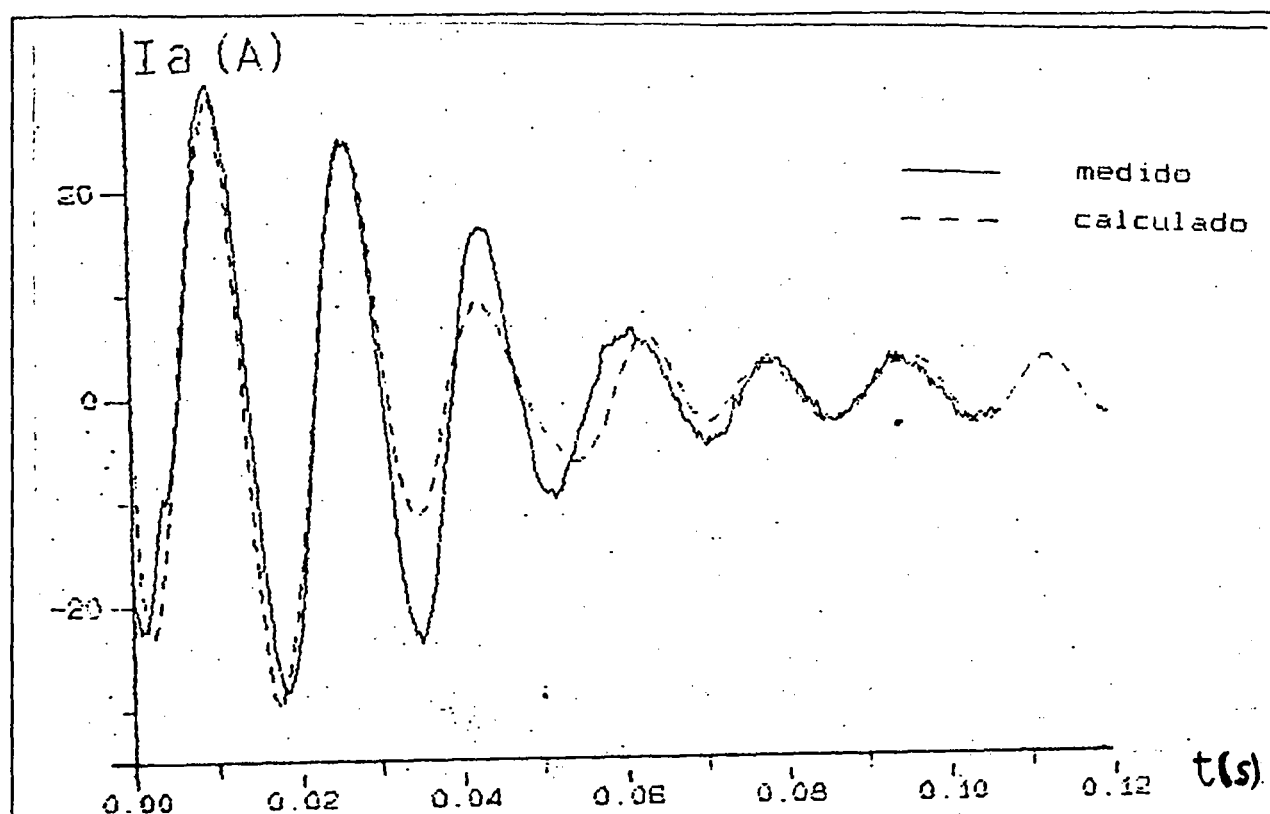


Figura VIII.8 Corrente do estator durante a aceleração livre da máquina 1.

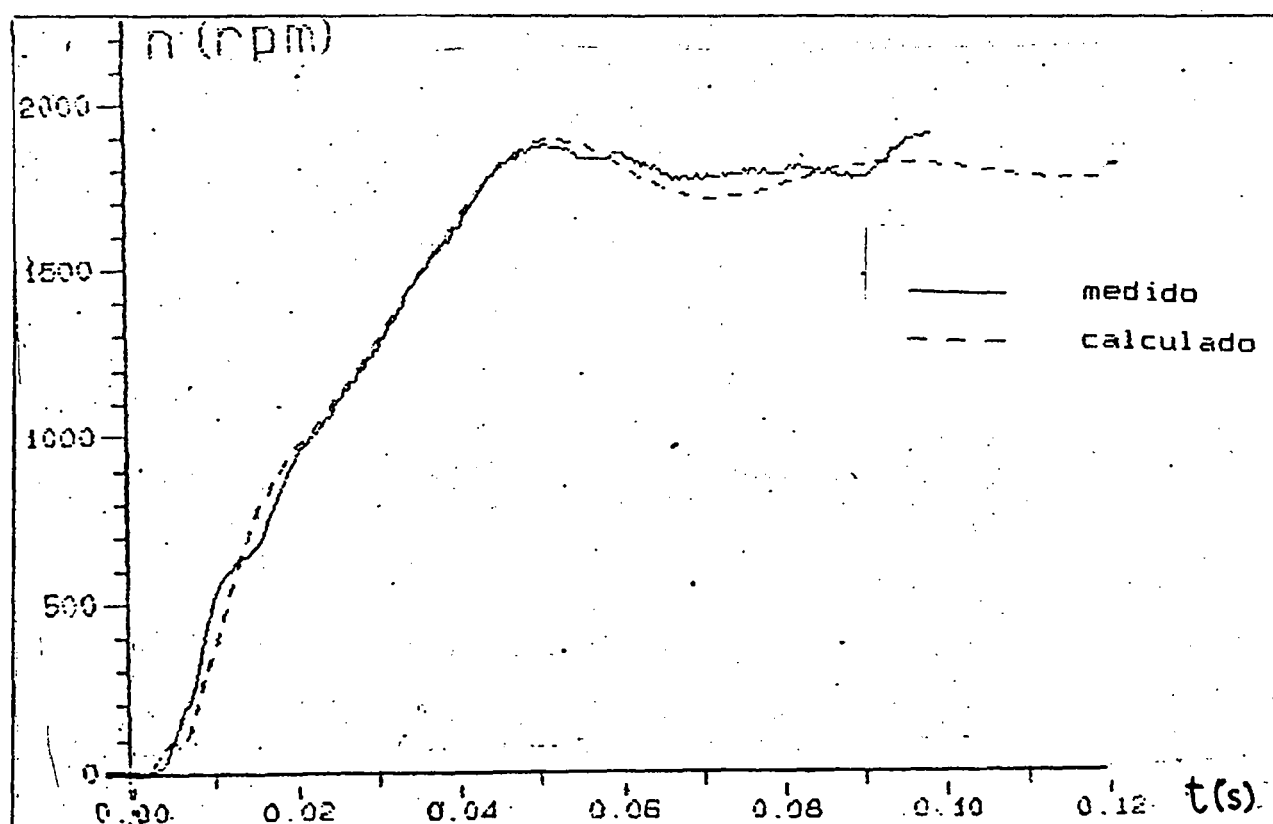


Figura VIII.9 Velocidade x tempo durante a aceleração livre da máquina 1.



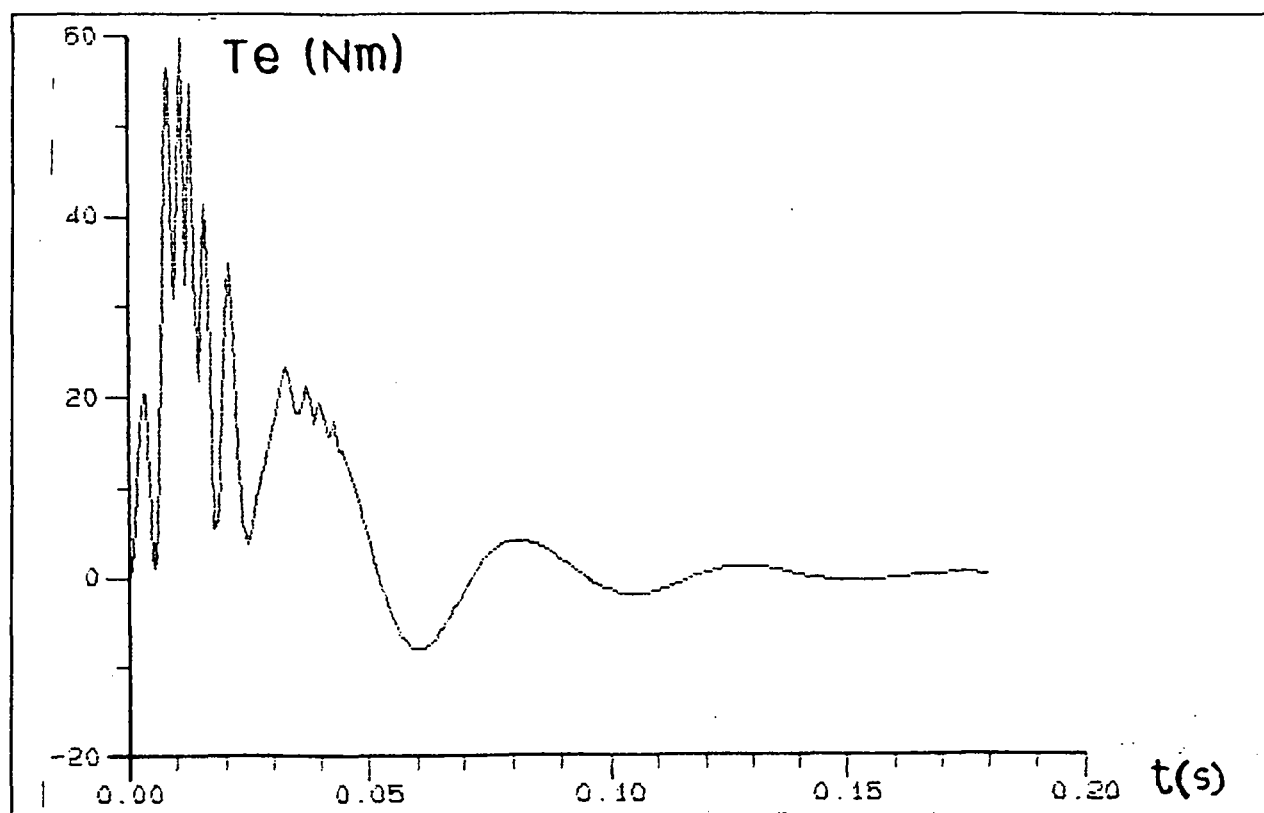


Figura VIII.10 Conjugado eletromagnético de aceleração livre da máquina 1.

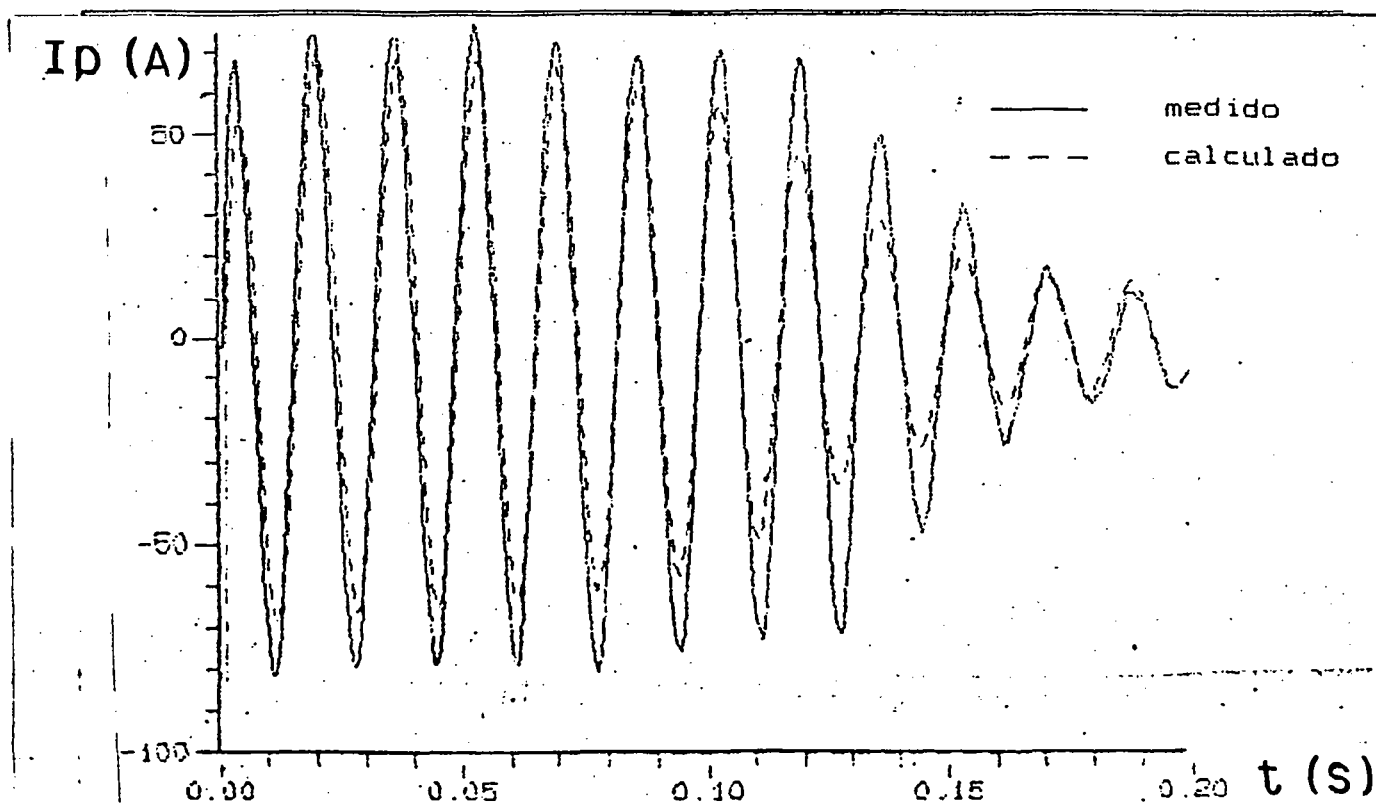


Figura VIII.11 Corrente do enrolamento principal durante a aceleração livre da máquina 2.

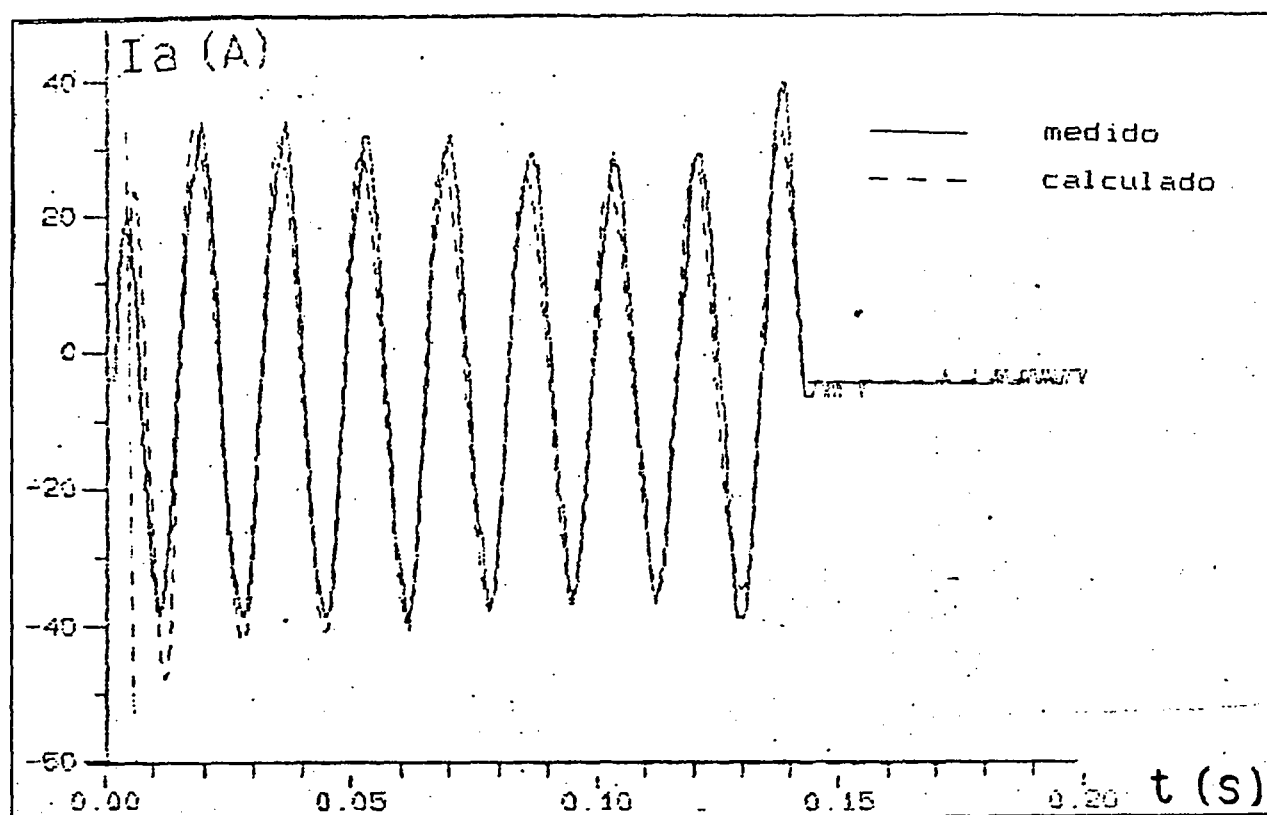


Figura VIII.12 Corrente do enrolamento auxiliar durante a aceleração livre da máquina 2.

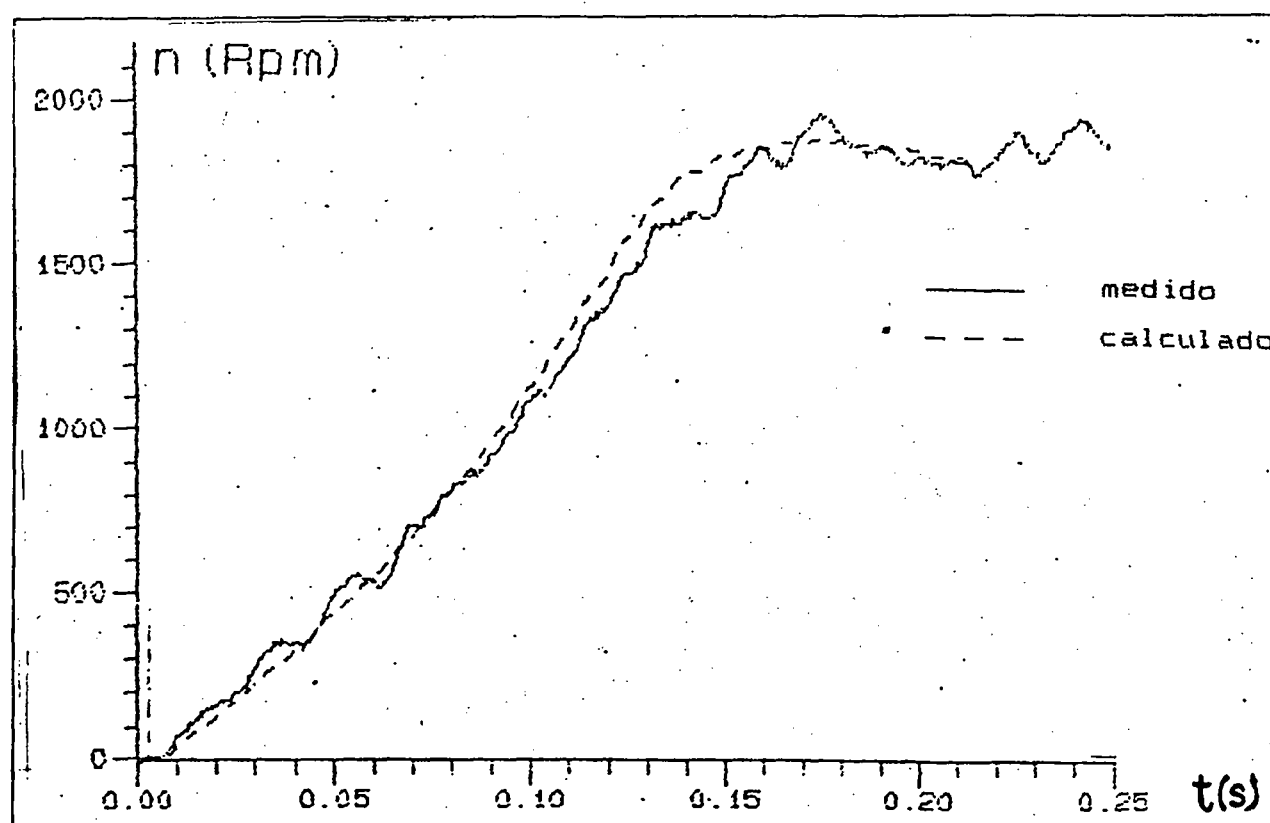


Figura VIII.13 Velocidade x tempo durante a aceleração livre da máquina 2.

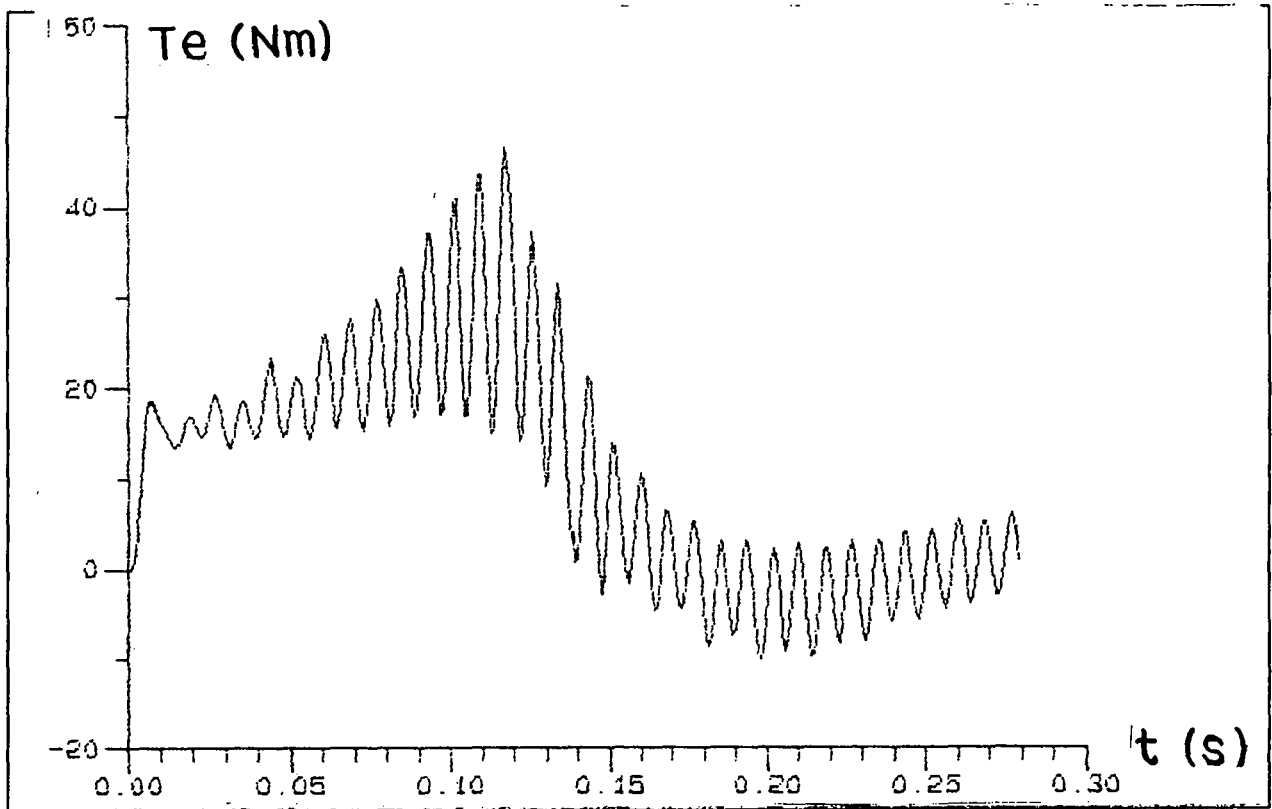


Figura VIII.14 Conjugado eletromagnético de aceleração livre da máquina 2.

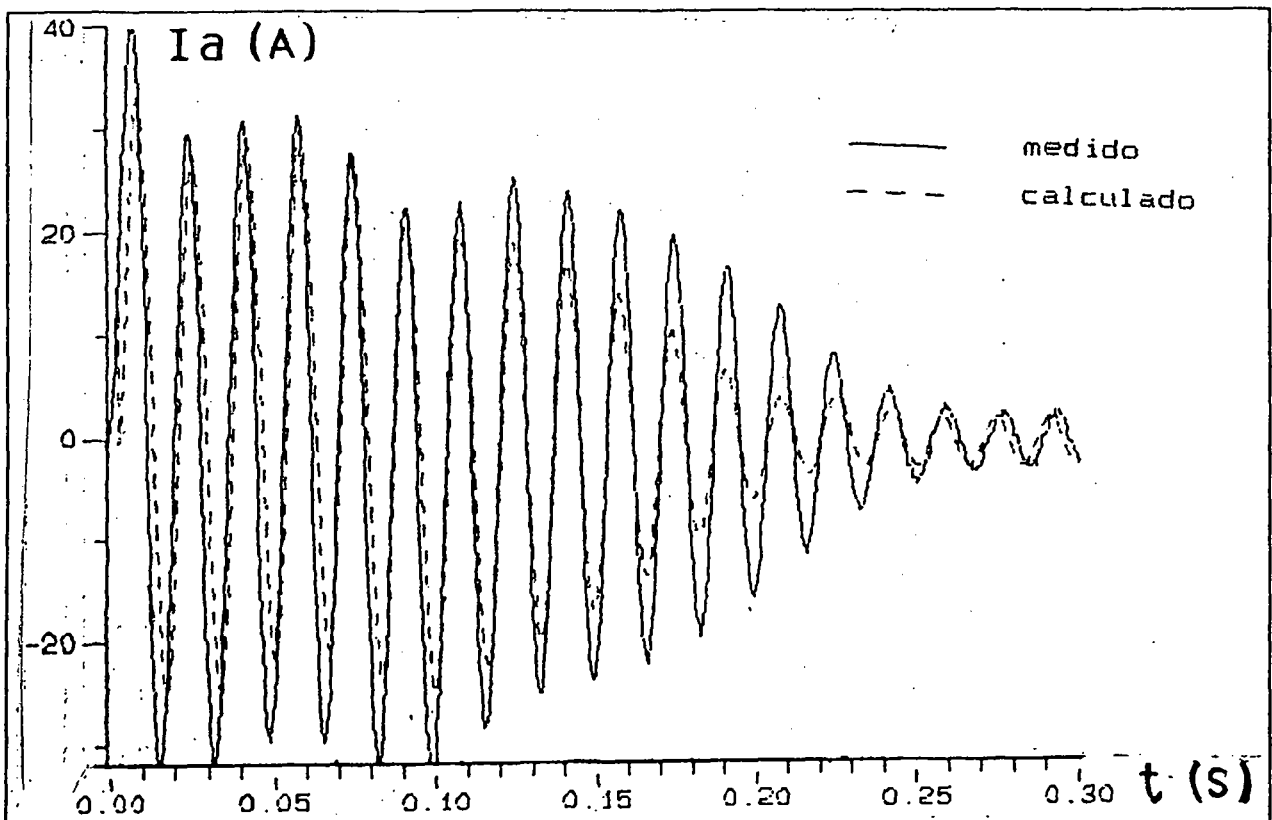


Figura VIII.15 Corrente do estator durante a aceleração livre da máquina 3.

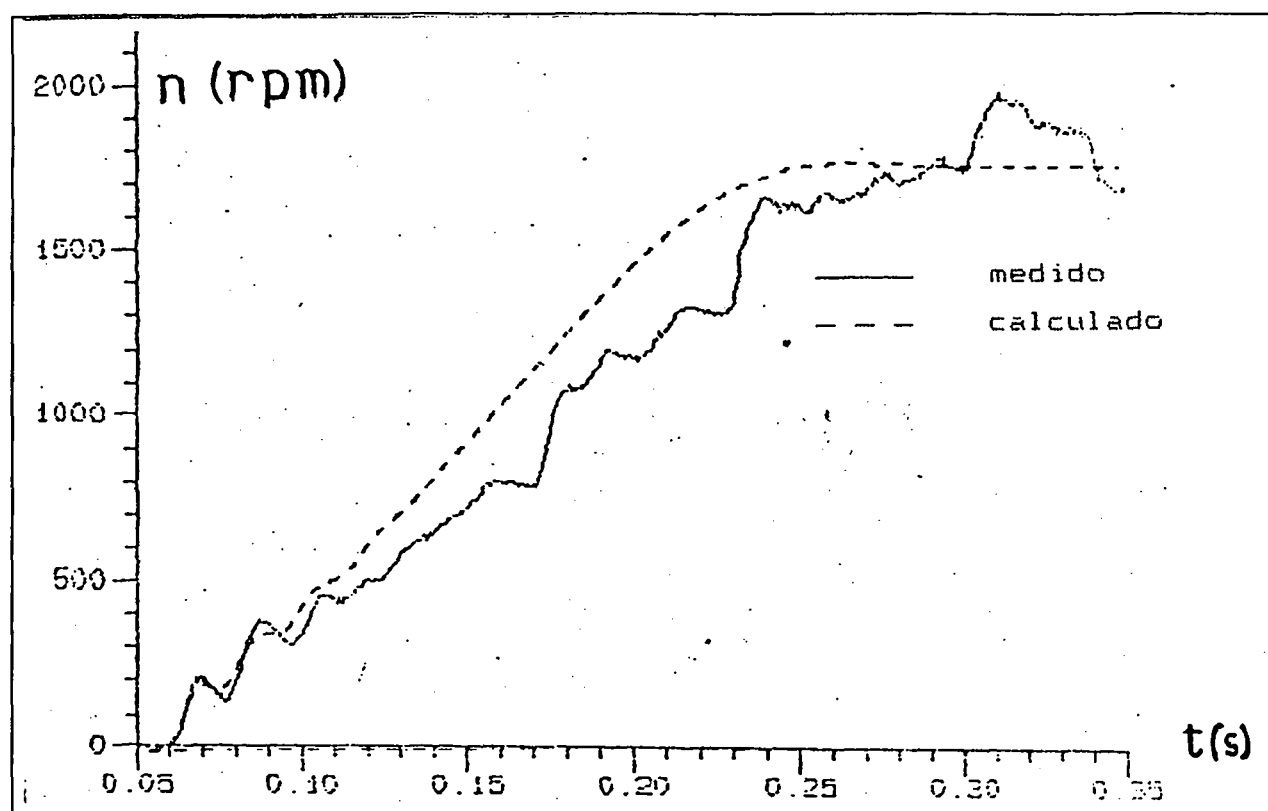


Figura VIII.16 Velocidade x tempo durante a aceleração livre da máquina 3.

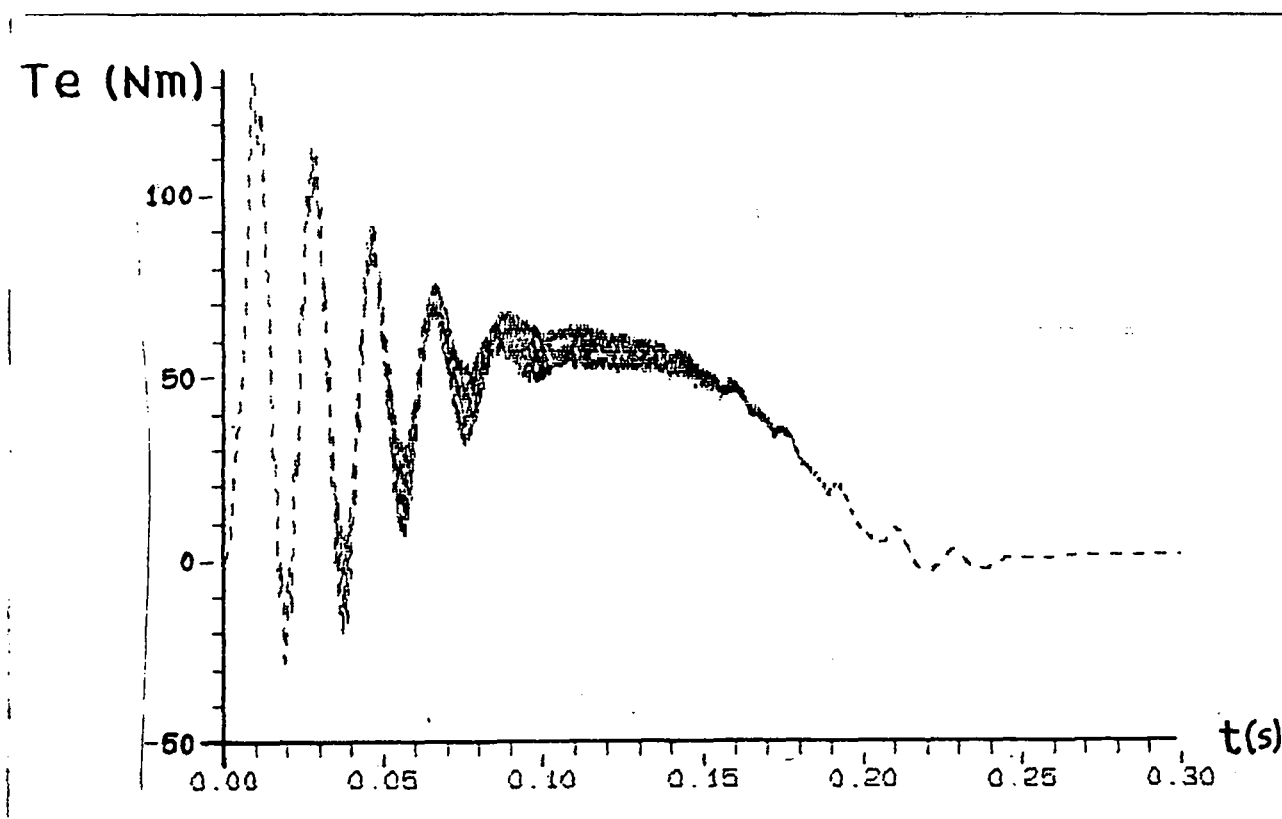


Figura VIII.17 Conjugado eletromagnético de aceleração livre da máquina 3.

### VIII.3 - Comparação com modelo de Park.

Para dar validação aos modelos, as curvas de correntes e velocidades nas partidas das máquinas foram apresentadas, comparando-se resultados de simulações e ensaios. A simples validação pode ser dada pela semelhança das formas e nuances presentes, além das comparações entre amplitudes de correntes e tempo de aceleração. Uma forma de confirmar a validação dos modelos e a qualidade dos mesmos pode ser feita comparando-se os resultados de simulações com outros resultados obtidos através de um modelo com validade já reconhecida e que seja de uso corrente por parte de estudiosos do assunto em questão. Apesar da nova modelagem, pela própria proposta de inclusão dos efeitos das harmônicas de fmm possuir maior potencial de representatividade e de recursos de aplicação que os modelos convencionais, a comparação que será mostrada serve para melhorar a confiabilidade no que de novo se apresenta.

Os resultados das máquinas trifásicas são comparados com resultados obtidos por um programa em FORTRAN para modelo de Park convencional de uso no Departamento de Eletrotécnica da UFRJ. Como não se dispõe de medidas do conjugado eletromagnético, apenas as curvas dos modelos propostos e do modelo de Park podem ser comparadas entre si.

São apresentados também comparações entre as simulações com o modelo de Park e os do novo modelo, calculados para a máquina 1 e apenas com a frequência fundamental.

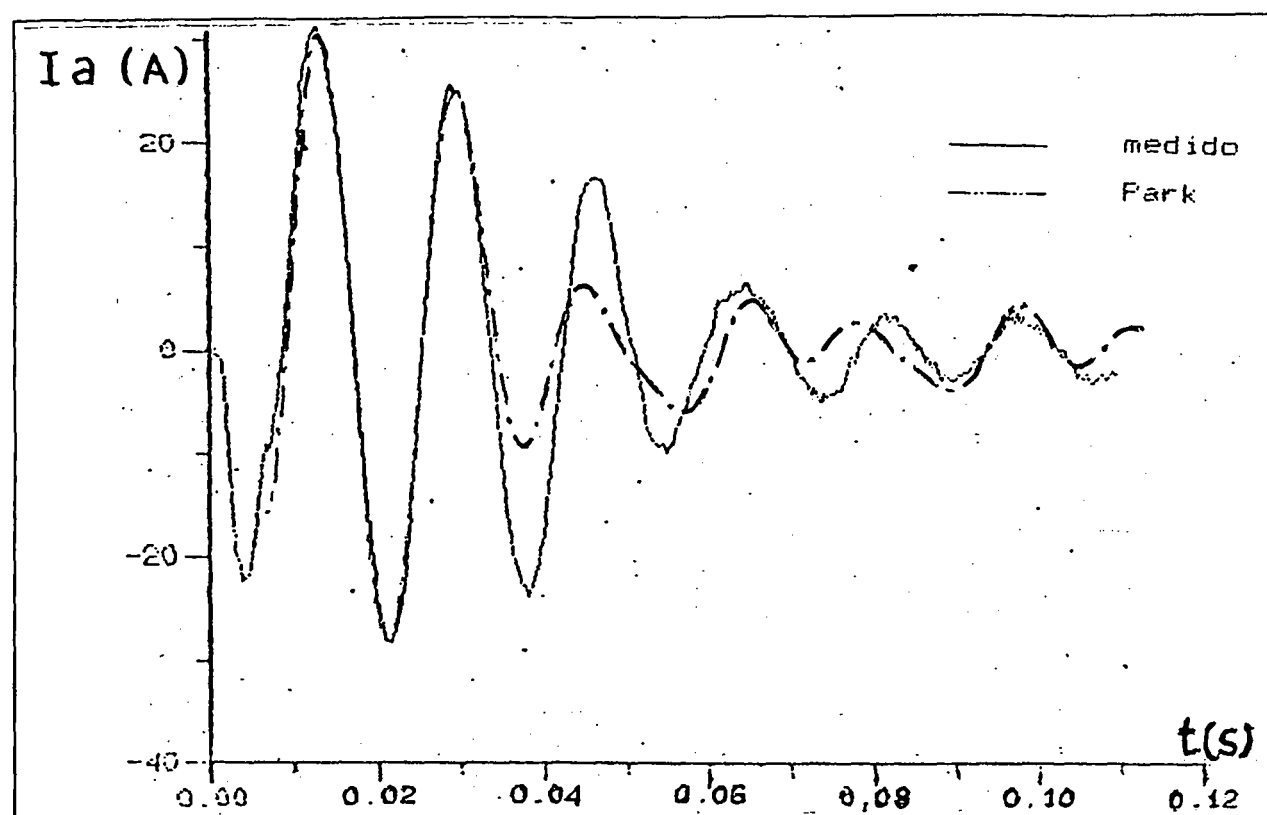


Figura VIII.18 Corrente do estator durante aceleração livre da máquina 1. Modelo de Park x Ensaios.

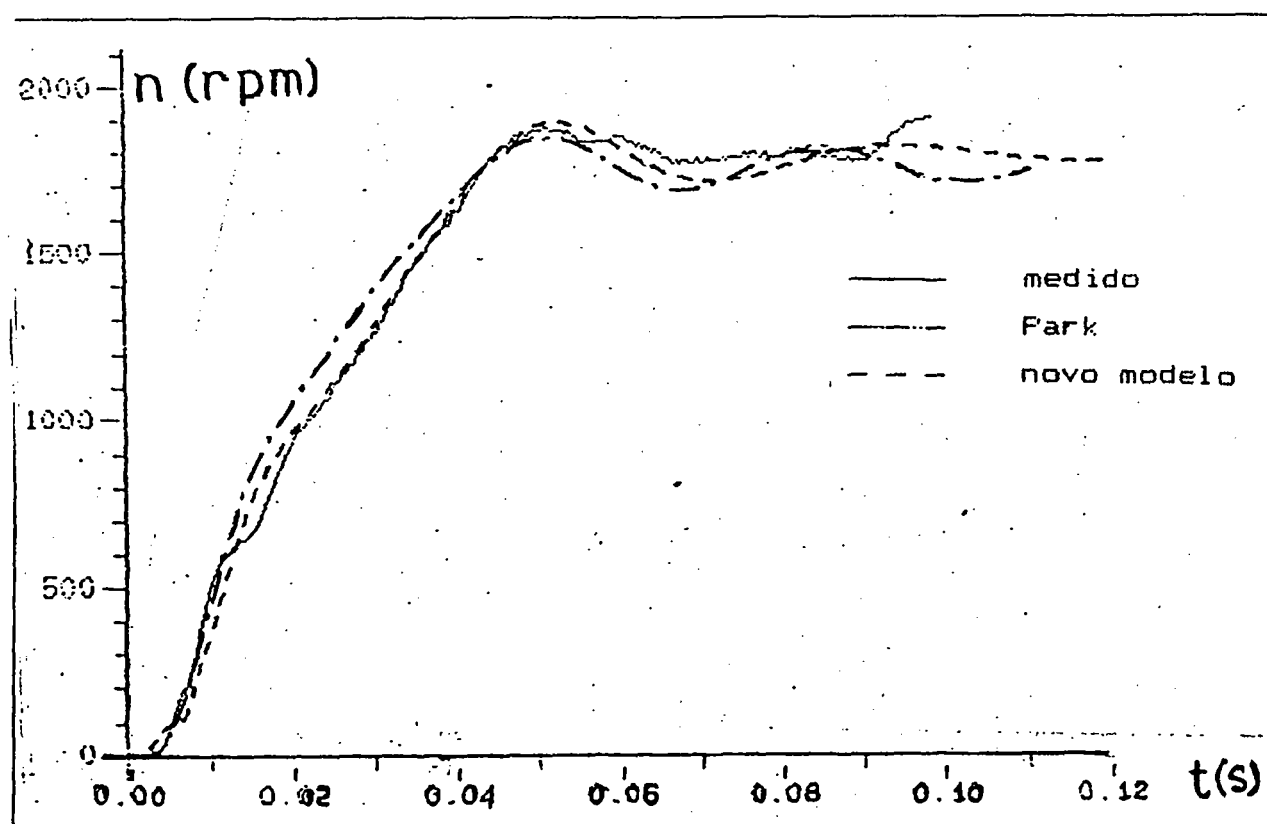


Figura VIII.19 Velocidade x tempo durante aceleração livre da máquina 1. Novo modelo x Modelo de Park x Ensaios.

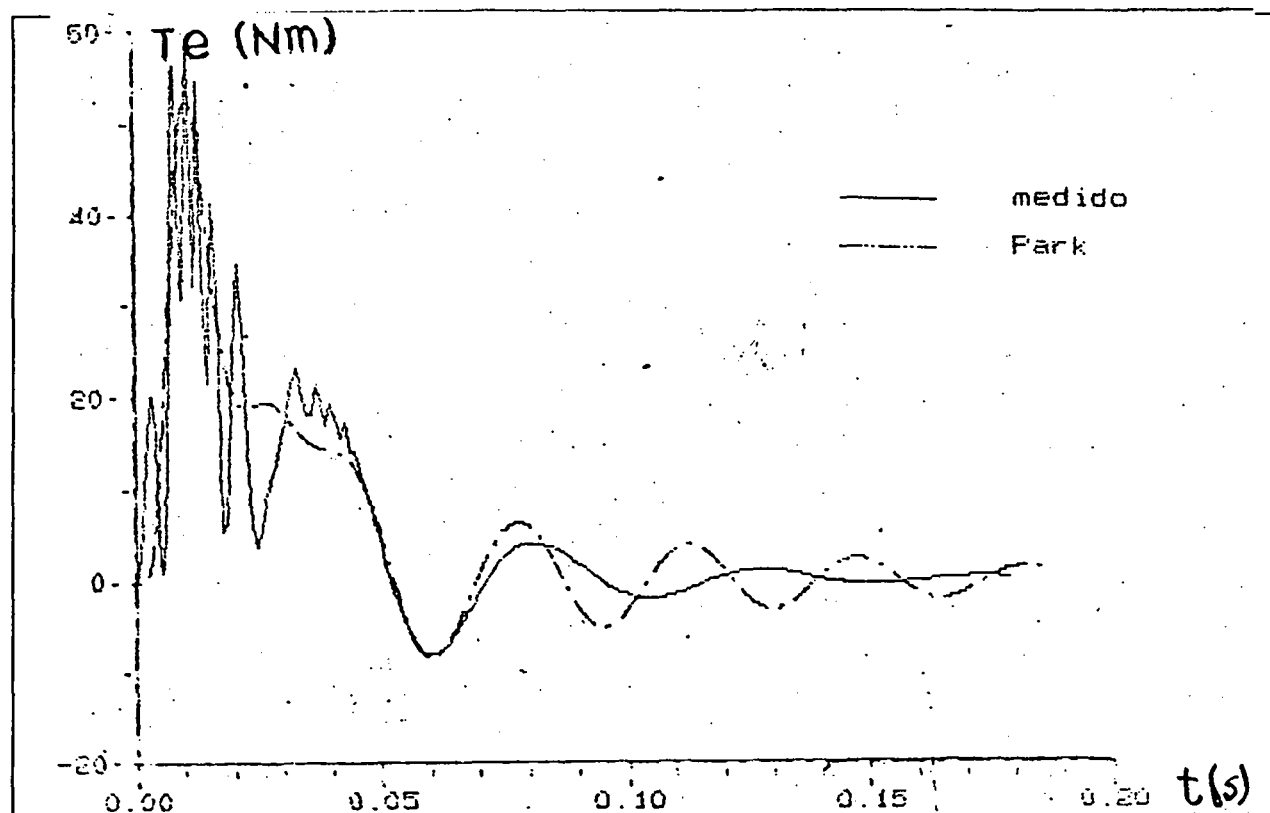


Figura VIII.20 Conjugado eletromagnético de aceleração livre da máquina 1.  
Novo modelo x Modelo de Park.

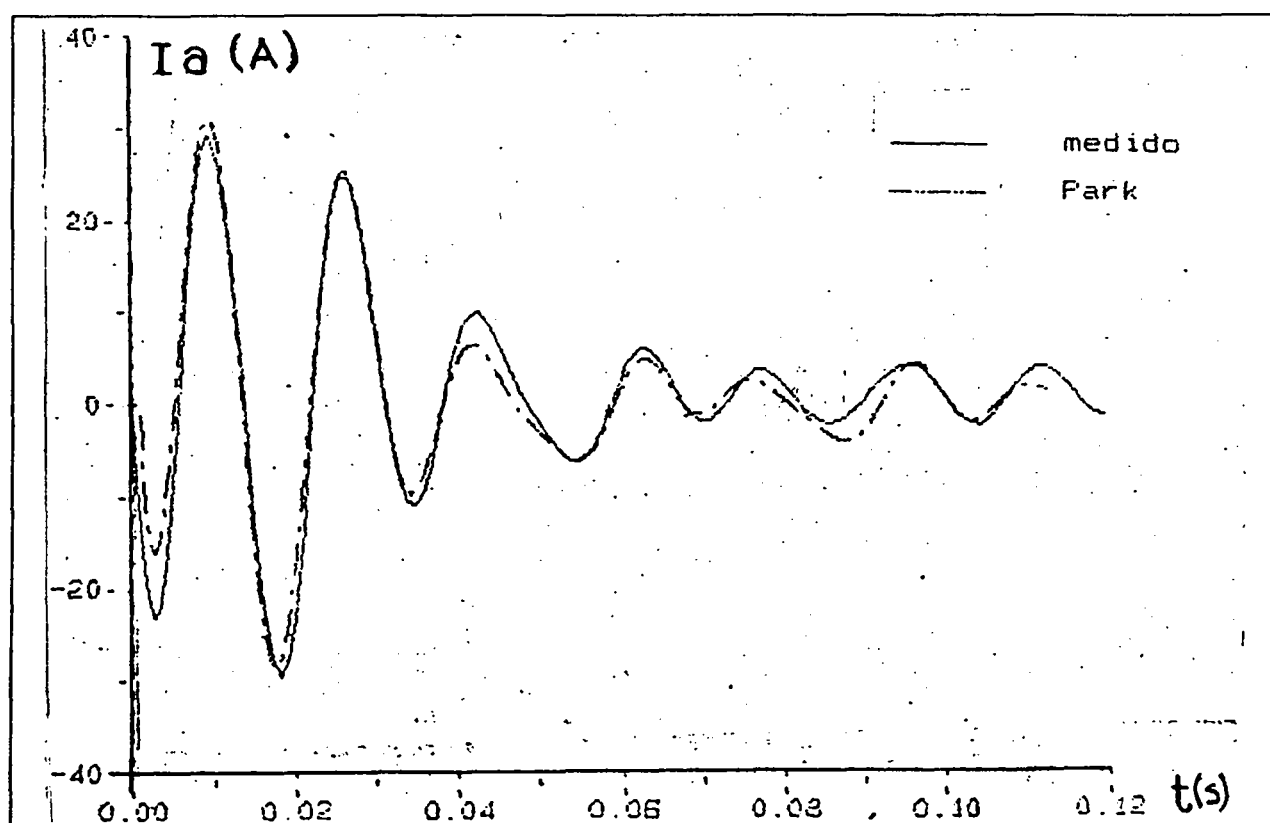


Figura VIII.21 Corrente do estator durante aceleração livre da máquina 1. Novo modelo sem harmônicas x Modelo de Park.

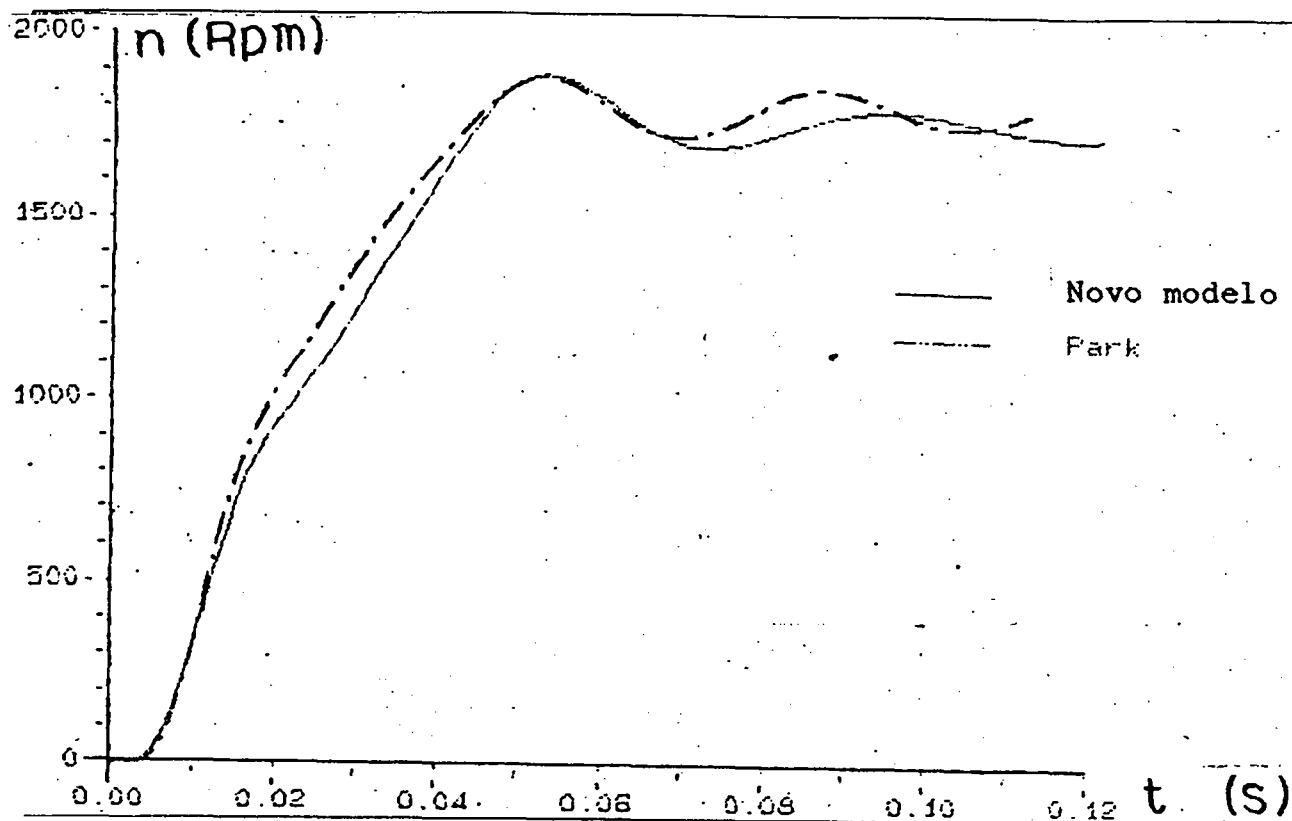


Figura VIII.22 Velocidade x tempo durante aceleração livre da máquina 1. Novo modelo sem harmônicas x Modelo de Park x Ensaios.

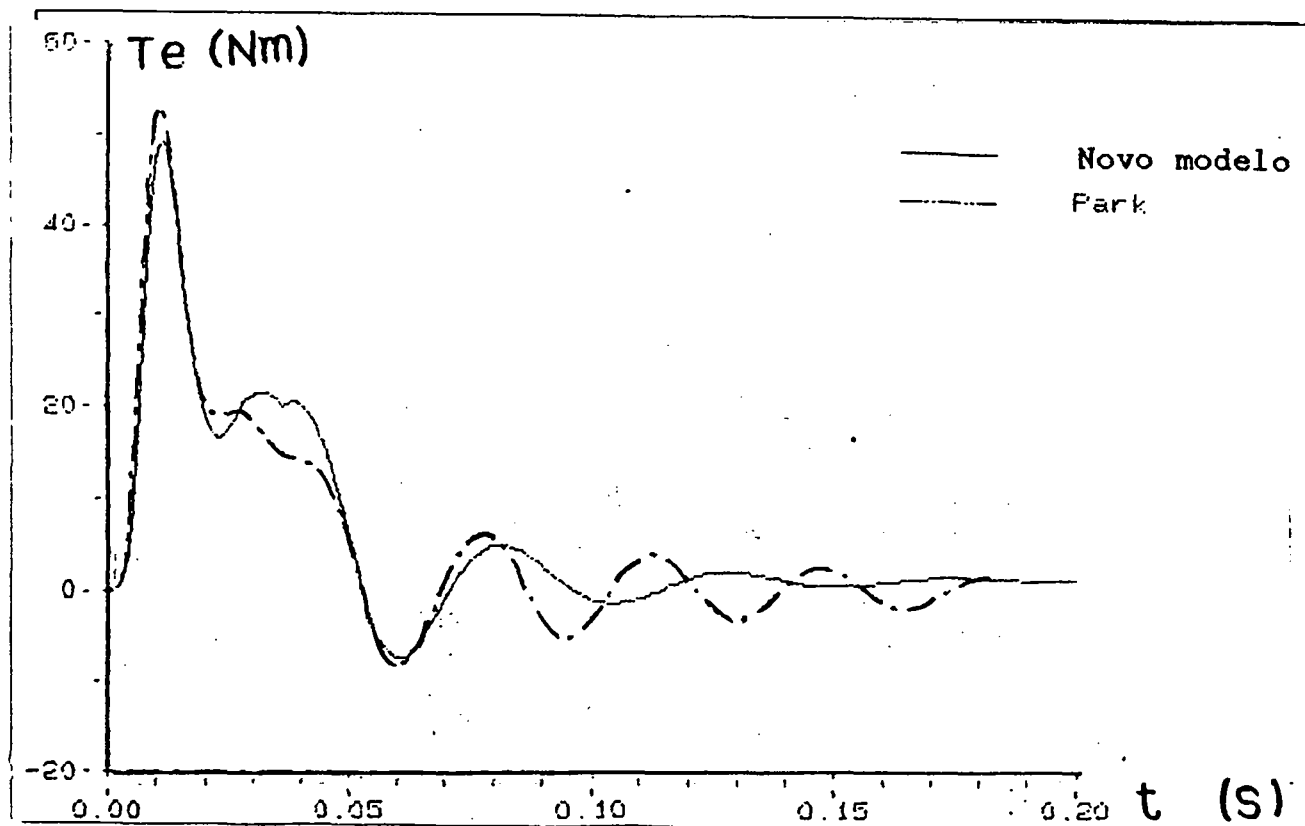


Figura VIII.23 Conjugado eletromagnético de aceleração livre da máquina 1. Novo modelo sem harmônicas x Modelo de Park.



#### VIII.4 - Aplicações.

Os modelos são aplicados principalmente a análises de correntes e conjugados eletromagnéticos. Eles podem ser utilizados em máquinas ainda em fase de projeto, em protótipos ou em acionamentos especiais das máquinas comerciais atualmente fabricadas. Além das curvas mostradas na fase de validação, outras podem ser obtidas pelos modelos. As correntes das barras e dos anéis podem ser representadas da mesma forma que foram as correntes de estator. Elas são úteis para observações da variação de frequência e de amplitudes. No caso da gaiola dupla as correntes de barra ou de segmento de anel podem ser obtidas separadamente para cada anel.

Uma aplicação importante para os modelos propostos é em estudos de conjugados parasitas e seus problemas relacionados, tais como vibrações e dificuldades de partida. Pelas curvas de conjugados eletromagnéticos apresentadas ficam evidentes essas aplicações. Apesar da presença das harmônicas praticamente não produzir modificações na aceleração dos motores utilizados, a diferença entre as curvas de conjugado total e de conjugado da harmônica fundamental é muito grande, mostrando a que os novos modelos são indispensáveis nestes casos.

#### VIII.5 Conclusões:

Os resultados apresentados neste capítulo tiveram como objetivo validar e avaliar a qualidade da modelagem proposta. Foram realizadas comparações entre valores medidos e calculados para pontos de operação em regime permanente e curvas de regime transitório de partida das três máquinas utilizadas. Visualmente, confirma-se uma razoável aproximação entre resultados medidos e calculados. Por outro lado, as comparações numéricas revelaram que em alguns pontos localizados podem ocorrer discrepâncias consideráveis (Veja observações anexas às Tabelas VIII.4, VIII.5 e VIII.6). As possíveis causas dessas discrepâncias já foram comentadas ao longo deste capítulo, onde se fez um destaque maior para a necessidade de maiores informações na documentação dos ensaios dos fabricantes e também pelas técnicas de medição por eles empregadas. Esta decisão em utilizar os resultados de ensaios dos fabricantes, apesar das dúvidas que possam surgir, pode ser entendida como uma intenção de tornar mais autêntica a pretendida validação. O novo modelo mostrou ter precisão ligeiramente melhor que o modelo de Park e, ainda é capaz de mostrar com mais detalhes as formas das curvas, destacando-se os zig-zags provocados nas curvas de conjugado eletromagnético pela presença das harmônicas espaciais representadas. Foram incluídos nos programas de simulações os seguintes

fatores de correções de parâmetros: temperatura, penetração de fluxo, difusão de corrente nos segmentos de anel, fator de saturação, fator de Carter, saturação de corrente em ranhuras de barras fechadas. Todas essas correções foram implementadas nas expressões trabalhadas no Apêndice B e foram incluídas nos programas de cálculo como variantes de acordo com as condições de operação. Dessa forma, mesmo quando utilizado sem a representação de harmônicas, a modelagem ainda apresenta excelente representação, mantendo sua vantagem sobre o modelo de Park.

## CAPÍTULO IX

### CONCLUSÕES GERAIS

#### Das etapas de trabalho:

A modelagem da máquina de indução elaborada através da teoria de circuitos acoplados e considerando efeitos de harmônicas espaciais de fmm foi analisada neste trabalho. Três tipos de máquinas de indução foram estudadas: máquina trifásica de rotor comum, máquina monofásica com enrolamento auxiliar mais capacitor de partida e máquina trifásica de gaiola dupla.

Foram obtidas e apresentadas curvas características de regime permanente e de regime transitório de partida, além de pontos de operação em carga e condições de rotor livre e rotor bloqueado.

Das equações dos modelos, elaboraram-se três programas principais em linguagem Fortran. Os programas permitem o cálculo de condições de operação a velocidade constante e de condições transitórias em função do tempo. No regime dinâmico, foi utilizado o método de Runge Kutta de quarta ordem para a integração numérica.

Utilizou-se máquinas comerciais como fonte de dados. Suas características físicas (arranjos e dimensões) foram empregadas para obtenção dos parâmetros envolvidos nas equações dos modelos. Os parâmetros foram calculados por fórmulas tradicionalmente conhecidas.

Outras formas de obtenção dos parâmetros foram investigadas e comentadas.

#### Da validação:

Para validação, os resultados de simulações foram comparados às medições realizadas nos ensaios. Alguns ensaios foram fornecidos pelos fabricantes e outros, necessários, foram realizados no LAMEP/UFSC.

Apesar das dificuldades na utilização dos ensaios fornecidos pelos fabricantes (regime permanente), adotou-se esta metodologia para dar maior autenticidade no processo de validação. Estes ensaios, em geral, não contém todas as informações necessárias para que as simulações sejam executadas nas mesmas condições, obrigando, por vezes, à utilização de processos de recorrência para a obtenção dos dados necessários.

Os resultados encontrados por simulação se aproximaram satisfatoriamente dos valores obtidos nos ensaios. As grandezas comparadas nas tabelas VIII.1, VIII.2 e VIII.3 apontam, em geral, diferenças menores que 4%, ocorrendo duas grandes discrepâncias na corrente da máquina 1 (-7,65%) e no conjugado da máquina 2 (5,21%).

Como as perdas rotacionais e no ferro não foram incluídas nas equações do modelo, era de se esperar que os resultados de correntes nas simulações fossem menores que os de ensaios e que os valores de conjugado tivessem um comportamento inverso. As diferenças encontradas para estas grandezas foram menores que 10%, consideradas aceitáveis.

Nas curvas de regime permanente, a quase totalidade dos pontos de operação comparados está muito próxima das curvas calculadas, destacando-se as maiores diferenças para as curvas de conjugado eletromagnético. Como já foi justificado, os conjugados calculados diferem dos conjugados úteis medidos por vários motivos. Destacam-se, as perdas que se interpõem entre conjugado eletromagnético e conjugado no eixo e, também, as técnicas de medição de conjugado útil empregadas pelos fabricantes.

Os resultados de regime dinâmico foram bons, excetuando-se apenas as grandes diferenças para a corrente do enrolamento principal da máquina 2 e para a corrente da máquina 3. No primeiro caso, justifica-se a diferença pela ligação dos enrolamentos da máquina. O enrolamento auxiliar é ligado na metade do enrolamento principal enquanto que nas simulações eles são considerados independentes, gerando uma corrente calculada um pouco menor que a medida. No segundo caso, a forma da curva calculada, após a segunda metade do tempo de aceleração, difere acentuadamente da curva ensaiada. Ainda assim a curva obtida pelo novo modelo é mais próxima que a obtida pelo modelo de Park. Discrepâncias desse tipo poderiam ser causadas por diferenças no ângulo inicial da tensão, combinadas a pequenos erros na representação dos parâmetros.

#### Da qualidade:

Sob o ponto de vista da proximidade numérica, o novo modelo mostrou-se ligeiramente melhor que o de Park, obtendo-se as curvas de correntes de partidas muito próximas nos dois casos, com pequena vantagem para o novo modelo. A mesma avaliação pode ser feita para as curvas de velocidade.

Para máquinas comerciais empregadas, o novo modelo pode ser considerado melhor que o de Park, tendo como grande vantagem a possibilidade de emprego nos estudos de máquinas com fortes conteúdos de harmônicas. Nessas situações,

o modelo de Park se afasta da realidade enquanto que os novos modelos se mostraram capazes de representar bem esses efeitos. Essa conclusão pode ser tirada pela observação das oscilações das curvas de conjugado eletromagnético obtidas pelos dois modelos.

### **Principais contribuições:**

O equacionamento em circuitos acoplados e as transformações utilizadas constituem uma técnica de modelagem simplificada, eficiente e abrangente em termos da representação harmônica de fmm. Baseada em estudos anteriores, foi apresentada em três capítulos todo o desenvolvimento matemático da modelagem da máquina trifásica, buscando-se as comprovações de resultados anteriormente mencionados. A partir deste desenvolvimento e das características particulares do motor monofásico, estabeleceu-se um modelo apropriado para esta outra máquina. Para os dois casos, foi apresentada toda uma interpretação física com a finalidade de esclarecer os resultados matemáticos encontrados nos modelos. Com isso, pode-se identificar a estrutura dos sistemas de variáveis em componentes simétricas e coeficientes constantes em termos das relações entre variáveis e referências estabelecidas. Da máquina trifásica, também, obteve-se uma nova modelagem para máquinas com rotores de gaiolas dupla, onde são incluídas, além dos efeitos de harmônicas de fmm, relações estabelecidas pela distribuição de fluxos entre as gaiolas e os enrolamentos do estator. Em todos os casos, as correntes das gaiolas podem ser obtidas de forma direta pela solução do sistema de equações.

Além das modelagens desenvolvidas, foi apresentada uma análise sobre metodologias para cálculo de parâmetros, onde o principal destaque foi dado para o cálculo da reatância de cabeça de bobina, propondo-se uma nova técnica de cálculo para ela. Para isto, utilizou-se um programa de cálculo de campos magnéticos tridimensionais baseado na teoria de elementos finitos.

### **Das aplicações:**

As curvas obtidas pelos modelos são apropriadas para estudos de máquina de indução envolvendo análise de harmônicas de correntes do estator, das barras e dos anéis. Para estudos de conjugados parasitas e suas frequências de oscilação, o modelo parece ser o mais indicado, podendo analisar separadamente as curvas relativas a cada harmônica.

Os efeitos de harmônicas existentes nas curvas de conjugado eletromagnético em regime permanente podem ser observados pelas ondulações mostradas nas regiões próximas ao escorregamento 1.0. A presença de fortes

harmônicas ( $7^{\text{a}}$  e  $11^{\text{a}}$  principalmente) sempre provoca esse tipo de deformação nestas curvas. Nas máquinas utilizadas, o efeito é fraco porque as mesmas já foram melhoradas experimentalmente pelos seus fabricantes.

O modelo, portanto pode ser utilizado para análises de conjugado mínimo, análise de conjugados parasitas em geral e em estudos de arrastamentos e bloqueios na partida, em estudos de perdas, de interferências eletromagnéticas e de ruídos.

O modelo também pode ser empregado na análise das máquinas de indução acionadas através de conversores eletrônicos ou de qualquer outra forma de aplicação, onde o conteúdo de harmônicas nas correntes seja um fator relevante.

Como os parâmetros são calculados por equações internas dos programas de simulação, onde as variáveis envolvidas, principalmente as dimensões físicas das máquinas, são dados de entrada, a modelagem pode ser empregada para análise de desempenho de máquinas em fase de projeto, sem mesmo que um protótipo tenha sido construído.

#### **Dos parâmetros:**

Os parâmetros utilizados foram calculados utilizando-se os formulários existentes nas referências mencionadas. É de conhecimento geral que a maioria destas fórmulas dão bons resultados, ocorrendo alguma dificuldade no cálculo das indutância próprias, da indutância zig-zag e da indutância de cabeça de bobina. Nas indutâncias próprias, os cálculos dos circuitos magnéticos são feitos com muita simplificação. Para a zig-zag, as fórmulas pesquisadas não são devidamente justificadas, porém todos os autores a utilizam. E a fórmula empregada para o cálculo da indutância da cabeça de bobina exige o conhecimento de dimensões da máquina que são difíceis de se obter com precisão.

Outros métodos de cálculo de parâmetros foram investigados e comentados no Capítulo VII, envolvendo cálculos iterativos ou por elementos finitos. Para resistências e indutâncias de dispersão das barras, as fórmulas utilizadas ainda se mostram eficientes e de obtenção mais simplificada. O método para cálculo de resistência de anel apresentado por Williansom comprova maior precisão do que o uso do fator de correção Kring, não tendo sido utilizado por exigir o emprego de um programa computacional de cálculo, não disponível no GRUCAD, utilizando elementos finitos e potencial escalar complexo. Para a indutância de cabeça de bobina foi desenvolvida uma metodologia de cálculo, utilizando-se um programa de cálculos de campos tridimensionais por elementos

finitos, com potencial vetor real. Apesar do método ter sido validado, achou-se prematuro difundir o seu emprego nos modelos estudados. A busca de metodologias para cálculo de parâmetros foi exaustiva, consumindo cerca de um ano de trabalho. Os resultados obtidos reforçaram o sentimento de que os formulários empregados ainda se constituem em ferramentas de grande valor, com exceção dos parâmetros supra-citados.

#### **Cuidados:**

Além dos cuidados com o cálculo dos parâmetros, grande atenção deve ser prestada na realização dos ensaios. Devem ser verificadas, principalmente, as temperaturas ambientes e as temperaturas do estator e do rotor das máquinas. Na aquisição de curvas de regime dinâmico, devem ser registradas as curvas de tensão juntamente com as curvas das grandezas estudadas, para que o ângulo inicial da onda de tensão seja medido e considerado nas simulações correspondentes.

Os ensaios devem ser repetidos algumas vezes.

Resultados de ensaios fornecidos pelos fabricantes, quando utilizados, devem conter todos os detalhes necessários.

O passo de integração do método numérico empregado deve ser analisado em relação às frequências harmônicas consideradas no modelo.

#### **Sugestões:**

Os métodos investigados para cálculo de parâmetros devem ser analisados em estudos isolados, comparados com medições e com cálculos de parâmetros já realizados por fórmulas convencionais. Sugere-se investigar métodos que empreguem elementos finitos.

No caso da indutância de cabeça de bobina, partindo-se da metodologia proposta, o próximo passo é utilizar um programa dedicado ao cálculo desse parâmetro, diferente deste trabalho, onde utilizou-se um programa generalizado.

A partir do presente estudo, outros tipos de máquinas monofásicas podem ser estudadas. O modelo e o programa pode ser modificado para essa finalidade. Poderão ser analisadas as modificações para modelar a máquina monofásica com a ligação real dos enrolamentos auxiliar e principal.

Como continuidade, sugere-se analisar o desempenho dos modelos nas diversas aplicações mencionadas, sendo a principal delas o estudo do acionamento com conversores eletrônicos.

## APÊNDICE A

Demonstração da relação  $L_{sr} = L_{rs}^{t*}$

$$L_{rs} = B L_{sr}^t A^{-1} = B \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} L_{sr} M_n^t A^{-1} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} L_{sr} B M_n^t A^{-1}, \quad (A.1)$$

onde:

$$M_n^t = \frac{e^{jnp\phi}}{2} \begin{bmatrix} 1 & b^{np} & \dots & b^{np(m-1)} \\ a^{-n} & b^{np} a^{-n} & \dots & b^{np(m-1)} a^{-n} \\ a^{-2n} & b^{np} a^{-2n} & \dots & b^{np(m-1)} a^{-2n} \end{bmatrix}^t + \frac{e^{-jnp\phi}}{2} \begin{bmatrix} 1 & b^{-np} & \dots & b^{-np(m-1)} \\ a^n & b^{-np} a^n & \dots & b^{-np(m-1)} a^n \\ a^{2n} & b^{-np} a^{2n} & \dots & b^{-np(m-1)} a^{2n} \end{bmatrix}^t \quad (A.2)$$

e

$$B M_n^t A^{-1} = 1/\sqrt{m} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & b & \dots & b^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b^{m-1} & \dots & b^{(m-1)(m-1)} \end{bmatrix} M_n^t 1/\sqrt{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}, \quad (A.3)$$

Que dá como resultado:

$$B M_n^t A^{-1} =$$

$$1/\sqrt{3} \left\{ \frac{e^{jnp\phi}}{2} \begin{bmatrix} \sum b^{npk} & a^{-n} \sum b^{npk} & a^{-2n} \sum b^{npk} \\ \sum b^{(np-1)k} & a^{-n} \sum b^{(np-1)k} & a^{-2n} \sum b^{(np-1)k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum b^{[np-(m-1)]k} & a^{-n} \sum b^{[np-(m-1)]k} & a^{-2n} \sum b^{[np-(m-1)]k} \end{bmatrix} + \right.$$



$$\frac{e^{-jnp\phi}}{2} \begin{bmatrix} \sum b^{-npk} & a^n \sum b^{-npk} & a^{2n} \sum b^{-npk} \\ \sum b^{(1-np)k} & a^n \sum b^{(1-np)k} & a^{2n} \sum b^{(1-np)k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum b^{[(m-1)-np]k} & a^n \sum b^{[(m-1)-np]k} & a^{2n} \sum b^{[(m-1)-np]k} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \right\} \quad (A.4)$$

Simplificando:

$$BM_n^t A^{-1} =$$

$$\frac{e^{jnp\phi}}{2\sqrt{3m}} \begin{bmatrix} \sum b^{npk} \\ \sum b^{(np-1)k} \\ \vdots \\ \sum b^{[np-(m-1)]k} \end{bmatrix} \left[ \begin{matrix} (1 + a^{-n} + a^{-2n}) & (1 + a^{2-n} + a^{1-2n}) & (1 + a^{1-n} + a^{2-2n}) \end{matrix} \right] +$$

$$\frac{e^{-jnp\phi}}{2\sqrt{3m}} \begin{bmatrix} \sum b^{-npk} \\ \sum b^{(1-np)k} \\ \vdots \\ \sum b^{[(m-1)-np]k} \end{bmatrix} \left[ \begin{matrix} (1 + a^n + a^{2n}) & (1 + a^{2+n} + a^{1+2n}) & (1 + a^{1+n} + a^{2+2n}) \end{matrix} \right] \quad (A.5)$$

Escrevendo a matriz  $L_{rs}$  como um somatório de  $-\infty$  a  $+\infty$ , tem-se:

$$L_{rs} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{L_{srn}}{2\sqrt{3m}} e^{-jnp\phi} \begin{bmatrix} \sum b^{-npk} \\ \sum b^{(1-np)k} \\ \vdots \\ \sum b^{[(m-1)-np]k} \end{bmatrix} \left[ \begin{matrix} 1+a^n+a^{2n} & 1+a^{2+n}+a^{1+2n} & 1+a^{1+n}+a^{2+2n} \end{matrix} \right] \quad (A.6)$$

Comparando a expressão (A.7) com a (III.39), vê-se que  $L_{sr} = L_{rs}^{t*}$ .

## APÊNDICE B

### CARACTERÍSTICAS DAS MÁQUINAS E PARÂMETROS CALCULADOS

#### B.1 Motor trifásico de gaiola simples.

Máquina 1 - Fonte: Planilhas de Dados WEG.

##### Principais dados:

Motor WEG - MOD 90S - FS = 1,15 - ISOL B - CAT N

Potência - 2,0 CV, Tensão 220/380 V, Corrente 6,5/3,8 A

Frequência - 60 Hz,  $\cos \phi = 0,83$  e ligação  $\Delta/Y$

Nº de polos - P = 4

Ranhuras do estator - S<sub>1</sub> = 36

Ranhuras do rotor - S<sub>2</sub> = 44

Condutores por ranhura no estator - 42 - passo 1:8:10:12

Nº de grupos - 2 por fase - Enrolamentos concêntricos

Comprimento da máquina - l = 0,09 m

Raio externo do estator - Re<sub>e</sub> = 0,07 m

Raio do furo do estator - Ri<sub>e</sub> = 0,04625 m

Raio externo do rotor - Re<sub>r</sub> = 0,04595 m

Espessura do entreferro -  $\delta$  = 0,0003 m

Seção transversal da ranhura do estator - Se<sub>1</sub> = 60,463 mm<sup>2</sup>

Seção transversal da ranhura do rotor - Se<sub>r</sub> = 26,6 mm<sup>2</sup>

Raio externo dos anéis da gaiola - Re<sub>a</sub> = 0,04595 m

Raio interno dos anéis da gaiola - Ri<sub>a</sub> = 0,03125 m

Espessura dos anéis - e = 0,007 m

Altura dos dentes do estator - h<sub>de</sub> = 0,012 m

Altura dos dentes do rotor - h<sub>dr</sub> = 0,0107 m

Raio do eixo - Re<sub>ixo</sub> = 0,015 m

Largura da coroa do estator -  $l_{ce} = 0,01175 \text{ m}$

Largura da coroa do rotor -  $l_{cr} = 0,02025 \text{ m}$

Largura do dente do estator -  $t_1 = 0,00385 \text{ m}$

Largura do dente do rotor -  $t_2 = 0,00313 \text{ m}$

Raio médio de entreferro -  $R_m = 0,0461 \text{ m}$

Momento de inércia -  $J = 0,00519 \text{ Kgm}^2$

Coefficiente de atrito -  $B_a = 0,000519 \text{ Kgm}^2/\text{s}$

Resistividade do alumínio a  $20^\circ\text{C}$  -  $\rho_{al} = 3,1346 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$

Coefficiente de temperatura do alumínio -  $\alpha_{al} = 3,8 \times 10^{-3} (1/^\circ\text{C})$

Coefficiente de temperatura do cobre -  $\alpha_{cu} = 4,0 \times 10^{-3} (1/^\circ\text{C})$

Inclinação das Barras -  $i_b = 8,1 \text{ mm}$

#### Cálculo de parâmetros:

Resistência do estator:

Calculada (Veinott):

$$LMC = 0,09 + \frac{\pi(0,0925 + 0,012 + 0,0004 + 0,000461) \times 1,5 \times 9}{36} \Rightarrow$$

$$LMC = 0,214 \text{ m}$$

Resistividade do fio 20 AWG usado nos enrolamentos -  $0,03448 \Omega/\text{m}$

$$R_s (20^\circ\text{C}) = 0,214 \times \frac{(12 \times 42)}{1} \times 0,03448 = 3,719 \Omega/\text{fase}$$

Resistência obtida por ensaio:  $R_s = 4,76 \Omega$  a  $90^\circ\text{C}$

Resistência da barra:

$$r_b(20^\circ\text{C}) = \frac{3,1346 \times 10^{-8} \times 0,09}{26,637 \times 10^{-8}} = 1,0591 \times 10^{-4} \Omega$$

Correção da resistência da barra por penetração de fluxo:

$$h = 0,0107 \text{ m} \quad e \quad \alpha = \sqrt{\frac{60\pi\mu_0 s}{3,1346 \times 10^{-8}}} = 86,93 \sqrt{s}$$

$$\Rightarrow \zeta = 0,930 \sqrt{s}$$

Para rotor bloqueado  $s = 1$ ,  $\zeta = 0,930$  e

$$K_r = 0,930 \frac{\text{sh}(1,860) + \text{sen}(1,860)}{\text{ch}(1,860) - \cos(1,860)} = 1,064$$

Resistência de segmento de anel:

$$l_a = \pi (0,0919 - 0,0147) = 0,2425 \text{ m}$$

$$S_a = 0,007 \times 0,0147 = 1,029 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$R_a(20^\circ\text{C}) = \rho l_a / S_a = \frac{3,1346 \times 10^{-8} \times 0,24}{0,0001029} = 7,3110 \times 10^{-5} \Omega$$

$$r_a(20^\circ\text{C}) = \frac{R_a}{44} = 1,6616 \times 10^{-6} \Omega$$

Correção da resistência devido a difusão de corrente:

$$D_r = 0,0919 - 0,0147 = 0,0772 \text{ m}$$

$$D_i = 0,0919 - 0,0147 \times 2 = 0,0625 \text{ m}$$

$$D_i / D_r = 0,81$$

$$K_{\text{ring}} = 2(1-0,81)(1 + 0,81)^4 / (1 - 0,81)^4 = 0,954$$

$$r_a(20^\circ\text{C}) = 0,954 \times 1,6616 \times 10^{-6} = 1,5852 \times 10^{-6} \Omega$$

Indutância de dispersão de ranhura do estator (Veinott):

$$l_s = \frac{3\mu_0(504 \times 0,9598)^2 \times 0,750 \times 0,09 \times 1,1412}{36} = 0,001888 \text{ H}$$

onde:  $C_x(\text{Veinott}) = 0,750$  e

$$K_{s1}(\text{Veinott}) = 1,1412$$

Indutância de dispersão da barra do rotor (Veinott):

$$H = (504 \times 0,9598 \times 3 \times 0,96 \times I) / (44 \times 0,12488) = 253,55 \text{ I}$$

$$K_{sp}'' = 0,173 \times 10^5 \times H^{(-1,4134 + 0,1045 \log H)}$$

$K_{sp}'' = 14,00$  para rotor livre

$k_{sp}'' = 2,34$  para rotor bloqueado

$$K_{sp} = K_{sp}'' + F = K_{sp}'' + 0,92$$

$$K_{sp} = 14,92 \text{ para rotor livre}$$

$$K_{sp} = 3,26 \text{ para rotor bloqueado}$$

$$l_b = \mu_o \times 0,09 \times K_{sp}$$

$$l_b (\text{vazio}) = 1,6869 \times 10^{-6} \text{ H}$$

$$l_b (\text{bloqueado}) = 3,6954 \times 10^{-7} \text{ H}$$

Correção devido à penetração de fluxo:

$$K_x = \frac{3}{1,86} \frac{[\text{sh}(1,86) - \text{sen}(1,86)]}{[\text{ch}(1,86) - \cos(1,86)]} = 0,982.$$

Indutância de dispersão de cabeça de bobina do estator (Kuhlmann):

$$l_{cb1} = \frac{3 (252)^2 \times 0,315 \times 0,9598^2}{2\pi \times 10^7 \times 4} \left[ 2 + 0,5 \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \right] = 0,000605 \text{ H}$$

Indutância de dispersão de segmento de anel do rotor (Kuhlmann):

$$l_{cb2} = \frac{44 \times 0,158 \times (1/2)^2}{2\pi \times 10^7 \times 16} \left[ \frac{\pi \times 9,22 \times 1,265}{1,7 \times 0,7 + 1,2 \times 1,47 + 1,4 \times 1,265} \right] \left[ 4 \text{ sen}^2 \frac{2\pi}{44} \right]$$

$$\Rightarrow l_{cb2} = 1,08613 \times 10^{-9} \text{ H}$$

Coefficientes de Carter:

$$K_{cest} = \frac{8,072(5 \times 0,3 + 2,2)}{8,072(5 \times 0,3 + 2,2) - 2,2^2} = 1,1934$$

$$K_{crot} = \frac{6,5616(5 \times 0,3 + 0,1)}{6,5616(5 \times 0,3 + 0,1) - 0,1(0,5 \times 0,3 + 0,1)} = 1,0024$$

$$K_c = K_{cest} \times K_{crot} = 1,1963$$

Comprimento de entreferro corrigido pelo Coeficiente de Carter:

$$\delta' = 1,1963 \times 0,0003 = 0,000359 \text{ m}$$

Fator de saturação:

A curva de saturação é apresentada na Figura VIII.3

Regiões de queda de força magnetomotriz:

Coroa do estator:

$$\text{Área: } A_1 = 2 l_{ce} = 2 \times 0,09 \times 0,01175 = 0,002115 \text{ m}^2$$

$$\text{Comprimento: } l_1 = \pi(R_{ee} - l_{ce}/2)/P = \pi(0,07 - 0,1175/2)/4 = 0,05036 \text{ m}$$

$$\text{Densidade de fluxo: } B_1 = \frac{\phi}{0,95 \times A_1} = \frac{\phi}{0,0020093} \text{ (Wb/m}^2\text{)}$$

Dentes do estator:

$$\text{Área: } A_2 = \frac{1 S_1 t_1}{P} = \frac{0,09 \times 36 \times 0,00385}{4} = 0,003118 \text{ m}^2$$

$$\text{Comprimento: } l_2 = h_{de} + l_{ce}/2 = 0,012 + 0,01175/2 = 0,01788 \text{ m}$$

$$\text{Densidade de fluxo: } B_2 = \frac{\phi}{0,637 \times A_2} = \frac{\phi}{0,00199} \text{ (Wb/m}^2\text{)}$$

Entreferro da máquina:

$$\text{Área: } A_g = \frac{1 2\pi R_m}{P} = \frac{0,09 \times 2\pi \times 0,0461}{4} = 0,006517 \text{ m}^2$$

$$\text{Comprimento: } l_g = \delta' = 0,000359 \text{ m}$$

$$K_p = (1 - P/100) = 0,96$$

$$\text{Densidade de fluxo: } B_g = \frac{\phi \times K_p}{0,637 A_g} = \frac{\phi}{0,0043243} \text{ (Wb/m}^2\text{)}$$

Dentes do rotor:

$$\text{Área: } A_4 = \frac{1 S_2 t_2}{P} = \frac{0,09 \times 44 \times 0,00313}{4} = 0,003099 \text{ m}^2$$

$$\text{Comprimento: } l_4 = h_{dr} + l_{cr}/2 = 0,0107 + 0,02025/2 = 0,02083 \text{ m}$$

$$\text{Densidade de fluxo: } B_4 = \frac{\phi \times K_p}{0,637 \times A_4} = \frac{\phi}{0,0020561} \text{ (Wb/m}^2\text{)}$$

Coroa do rotor:

$$\text{Área: } A_5 = 2 l_{cr} = 2 \times 0,09 \times 0,02025 = 0,003645 \text{ m}^2$$

Comprimento:  $l_s = \frac{\pi(R_{eixo} + l_{cr}/2)}{4} = \frac{\pi(0,015 + 0,02025/2)}{4} = 0,019733 \text{ m}$

Densidade de fluxo:  $B_s = \frac{\phi \times K_p}{A_s} = \frac{\phi}{0,0037970} \text{ (Wb/m}^2\text{)}$

Fluxo Polar:

$K\phi = \frac{V - I_1 r_1 \cos \phi}{V} = \frac{220 - 2,06 \times 4,76 \times 0,83}{220} = 0,963$

$\phi = \frac{220 \times 0,963}{4,44 \times 60 \times 252 \times 0,9598} = 0,003288 \text{ Wb}$

	B (Wb/m <sup>2</sup> )	H (A esp/m)	f <sub>mmplco</sub> (A esp)
Coroa do estator	1,63643	990	49,86
Dentes do estator	1,65226	1273	22,76
Entreferro	0,76035	605067,3	217,22
Dentes do rotor	1,59922	848	17,66
Coroa do rotor	0,86595	198	3,90

$\Delta F_{mt} = 311,40 \text{ A esp}$  e  $\Delta F_{mar} = 217,22 \text{ A esp}$

$FSM = \frac{311,40}{217,22} = 1,4336.$

Para rotor bloqueado à tensão plena, a queda de tensão seria:

$I_1 r_1 \cos \phi \cong 24 \times 4,76 \times 0,85 = 97,1 \text{ V} \Rightarrow$

$K\phi = 0,460$

$\phi = 0,460 \times 0,003288 / 0,963 = 0,00151 \text{ Wb} \Rightarrow FSM = 1,2083$

Dispersão zig-zag

$X_m = 2\pi f \cdot (3/2) \cdot \frac{4 \mu_o l R}{FSM \pi g_e} \cdot \left(\frac{K_w N f_s}{p}\right)^2$

$$X_m = \frac{48 \times \pi \times 10^{-7} \times 60 \times 0,09 \times 0,0461}{1,47058 \times 0,000359} \left[ \frac{0,9598 \times 252}{2} \right]^2 = 104,00 \, \Omega$$

$$X_{z1} = \frac{\pi^2 \times 104,00}{12} \left[ (4 \times 2^2)/36^2 \right] = 1,05604 \, \Omega \Rightarrow L_{zz1} = 0,0028012 \, H$$

$$X_{z2} = \frac{\pi^2 \times 104,00}{12} \left[ (4 \times 2^2)/44^2 \right] = 0,70694 \, \Omega \Rightarrow L_{zz2} = 0,0018751 \, H$$

$$\Rightarrow L_{zzb} = 1,17525 \times 10^{-7} \, H$$

#### Parâmetros para simulação:

Todas as bobinas do estator estão originalmente ligadas em série.

Resistência dos enrolamentos do estator:

$$- \text{a } 24^\circ\text{C} = 3,765 \, \Omega$$

Coefficiente de variação da resistência do fio utilizado =  $0,00393 \, \Omega/^\circ\text{C}$

$$- \text{a } 70^\circ\text{C} = 4,446 \, \Omega$$

$$- \text{a } 90^\circ\text{C} = 4,742 \, \Omega$$

O fabricante forneceu o valor de  $4,76 \, \Omega$  (Apêndice C)

Resistência de uma barra da gaiola:

$$- \text{a } 24^\circ\text{C} = 1,0765 \times 10^{-4} \, \Omega$$

Coefficiente de variação da resistência utilizado =  $0,0039 \, \Omega/^\circ\text{C}$

$$- \text{a } 110^\circ\text{C} = 1,4376 \times 10^{-4} \, \Omega$$

$$- \text{a } 138^\circ\text{C} = 1,5465 \times 10^{-4} \, \Omega$$

Esta resistência é corrigida internamente no programa de simulação devido ao efeito pelicular, que depende do escorregamento.

Resistência de um segmento de anel:

$$- \text{a } 24^\circ\text{C} = 1,6099 \times 10^{-8}$$

$$- \text{a } 110^\circ\text{C} = 2,1499 \times 10^{-8}$$

$$- \text{a } 138^\circ\text{C} = 2,3147 \times 10^{-8}$$

Indutância de dispersão de ranhura do estator =  $0,001888 \, H$



Indutância de dispersão de cabeça de bobina = 0,000605 H

Indutância de dispersão zig-zag do estator = 0,002801 H

Total de indutância de dispersão do estator = 0,005294 H

Indutância de dispersão (ranhura) de uma barra da gaiola

Para rotor bloqueado =  $3,6954 \times 10^{-7}$  H

Para rotor livre =  $1,6869 \times 10^{-6}$  H

Essa indutância varia com a saturação no ferro sobre a ranhura

Indutância de dispersão zig-zag de uma barra da gaiola =  $1,1753 \times 10^{-7}$  H

Total de indutância de dispersão da barra:

Para rotor bloqueado =  $4,8707 \times 10^{-7}$  H

Para rotor livre =  $1,8045 \times 10^{-6}$  H

Indutância de dispersão de segmento de anel =  $1,0861 \times 10^{-9}$  H

Fator de saturação a vazio = 0,7325

Fator de saturação com rotor bloqueado = 0,8276

A variação é feita internamente no programa conforme a corrente de carga.

Os demais parâmetros são calculados internamente no programa de simulação.

## B.2 Motor monofásico com enrolamento auxiliar de partida

Máquina 2 - Fonte: Planilhas de Dados KOHLBACH

### Principais dados:

Motor KOHLBACH - MOD KM 48N - FS = 1,1 - ISOL B - CAT B

Potência - 1,5 CV, Tensão 110/220 V, Corrente 13,8/6,8 A

Frequência - 60 Hz,  $\cos \phi = 0,740$

Nº de polos - P = 4

Ranhuras do estator - S<sub>1</sub> = 32

Ranhuras do rotor - S<sub>2</sub> = 44

Condutores por ranhura no estator:

Enrolamento principal: 15 - 23 - 28 passo 1:8:10:12

Enrolamento auxiliar: 9 - 15 - 22 passo 1:4:6:8

Nº de grupos - 4 do auxiliar e 4 do principal

Enrolamentos concêntricos - ligação série e paralelo

Comprimento da máquina -  $l = 0,12 \text{ m}$

Raio externo do estator -  $R_{ee} = 0,08 \text{ m}$

Raio do furo do estator -  $R_{ie} = 0,05 \text{ m}$

Raio externo do rotor -  $R_{er} = 0,04955 \text{ m}$

Espessura do entreferro -  $\delta = 0,00045 \text{ m}$

Seção transversal da ranhura do estator:

$Se_1 = 66,400 \text{ mm}^2$ ,  $Se_2 = 93,300 \text{ mm}^2$  e  $Se_3 = 113,900 \text{ mm}^2$

Seção transversal da ranhura do rotor -  $Ser = 26,800 \text{ mm}^2$

Raio externo dos anéis da gaiola -  $Rea = 0,0495 \text{ m}$

Raio interno dos anéis da gaiola -  $Ria = 0,0350 \text{ m}$

Espessura dos anéis -  $e = 0,001 \text{ m}$

Altura dos dentes do estator:

$h_{de1} = 11,50 \text{ mm}$

$h_{de2} = 15,00 \text{ mm}$

$h_{de3} = 17,50 \text{ mm}$

$h_{de4} = 17,50 \text{ mm}$

Altura dos dentes do rotor -  $h_{dr} = 8,65 \text{ mm}$

Raio do eixo -  $R_{eixo} = 10,5 \text{ mm}$

Largura da coroa do estator -  $l_{ce} = 11,375 \text{ mm}$

Largura da coroa do rotor -  $l_{cr} = 19,900 \text{ mm}$

Largura do dente do estator -  $t_1 = 4,400 \text{ mm}$

Largura do dente do rotor -  $t_2 = 3,000 \text{ mm}$

Raio médio de entreferro -  $R_m = 49,775 \text{ mm}$

Momento de inércia -  $J = 0,0155 \text{ Kgm}^2$

Coeficiente de atrito -  $Ba = 0,00155 \text{ Kgm}^2/\text{s}$

Resistividade do alumínio a  $20^\circ\text{C}$  -  $\rho_{al} = 3,1346 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$

Coeficiente de temperatura do alumínio -  $\alpha_{al} = 3,8 \times 10^{-3} (1/^\circ\text{C})$

**Parâmetros para simulação:**

Resistência do estator:

Enrolamento principal:

$$LMCp4 = 0,12 + \frac{\pi(0,1 + 0,0175 + 0,0006 + 0,000615) \times 1,5 \times 7}{32} = 0,242 \text{ m}$$

$$LMCp3 = 0,12 + \frac{\pi(0,1 + 0,0175 + 0,0006 + 0,000615) \times 1,5 \times 5}{32} = 0,207 \text{ m}$$

$$LMCp2 = 0,12 + \frac{\pi(0,1 + 0,0150 + 0,0006 + 0,000615) \times 1,5 \times 3}{32} = 0,171 \text{ m}$$

$$LMCpm = \frac{0,242 \times 28 + 0,207 \times 23 + 0,171 \times 15}{66} = 0,2137 \text{ m}$$

Resistividade do condutor (3 fios 20 AWG a 25°C) - 0,03396 Ω/m

$$Rsp = 0,2137 \times 528 \times \frac{0,03396}{3} = 1,2773 \text{ } \Omega \text{ a } 25^{\circ}\text{C}$$

Resistência fornecida pelo fabricante: Rs = 0,3546 Ω por grupo

Enrolamento auxiliar:

$$LMCa3 = 0,12 + \frac{\pi(0,1 + 0,0175 + 0,0006 + 0,000615) \times 1,5 \times 3}{32} = 0,172 \text{ m}$$

$$LMCa2 = 0,12 + \frac{\pi(0,1 + 0,0150 + 0,0006 + 0,000615) \times 1,5 \times 5}{32} = 0,206 \text{ m}$$

$$LMCa1 = 0,12 + \frac{\pi(0,1 + 0,0115 + 0,0006 + 0,000615) \times 1,5 \times 7}{32} = 0,236 \text{ m}$$

$$LMCam = \frac{0,172 \times 9 + 0,206 \times 15 + 0,236 \times 22}{46} = 0,2137 \text{ m}$$

Resistividade do condutor (2 fios 21 AWG a 25°C) - 0,04167 Ω/m

$$Rsa = 0,2137 \times 368 \times \frac{0,04281}{2} = 1,6385 \text{ } \Omega \text{ a } 25^{\circ}\text{C}$$

Resistência fornecida pelo fabricante: Rsa = 1,8196 Ω

Resistência da barra:

$$r_b(20^\circ\text{C}) = \frac{3,1346 \times 10^{-8} \times 0,12}{26,800 \times 10^{-6}} = 1,4036 \times 10^{-4} \Omega$$

Correção da resistência da barra por penetração de fluxo:

$$h = 0,0085 \text{ m} \quad e \quad \alpha = \sqrt{\frac{60\pi\mu_0 s}{3,1346 \times 10^{-8}}} = 86,93 \sqrt{s}$$

$$\Rightarrow \epsilon = 0,0085 \times 86,93 \sqrt{s} \Rightarrow \epsilon = 0,739 \sqrt{s}$$

Para rotor bloqueado  $s = 1$ ,  $\epsilon = 0,739$  e

$$K_r = 0,739 \frac{\text{sh}(1,478) + \text{sen}(1,478)}{\text{ch}(1,478) - \cos(1,478)} = 1,026$$

Resistência de segmento de anel:

$$l_a = 2\pi (0,0495 + 0,035)/2 = 0,2655 \text{ m}$$

$$S_a = \left( \frac{0,099 - 0,070}{2} \right) \times 0,01 = 0,000145 \text{ m}^2$$

$$R_a(20^\circ\text{C}) = \frac{3,1346 \times 10^{-8} \times 0,2655}{0,000145} = 5,7396 \times 10^{-5} \Omega$$

$$r_a(20^\circ\text{C}) = \frac{R_a}{44} = 1,3044 \times 10^{-6}$$

$$D_r = 2 \times (0,0495 - 0,0085/2) = 0,0905 \text{ m}$$

$$D_l = 0,070 \text{ m} \Rightarrow D_l/D_r = 0,7735$$

$$K_{\text{ring}} = 2(1-0,7735) \frac{(1 + 0,7735^4)}{(1 - 0,7735^4)} = 0,9581$$

$$r_a(20^\circ\text{C}) = 0,9581 \times r_a = 1,2498 \times 10^{-6}$$

Indutância de dispersão de ranhura do estator:

Fator de enrolamento:

$$K_{wp} = \frac{28\text{sen}78,75^\circ + 23\text{sen}56,25^\circ + 15\text{sen}33,75^\circ}{28 + 23 + 15} = 0,832$$

$$K_{wa} = \frac{22\text{sen}78,75^\circ + 15\text{sen}56,25^\circ + 9\text{sen}33,75^\circ}{22 + 23 + 15} = 0,849$$

Fator de distribuição de dispersão:

$$C_{xp} = \frac{28^2 + 23^2 + 15^2}{(28 + 23 + 15)^2} \times \frac{1}{0,832^2} \times 32/(4 \times 4) = 1,0201$$

$$C_{xa} = \frac{9^2 + 15^2 + 22^2}{(9 + 15 + 22)^2} \times \frac{1}{0,849^2} \times 32/(4 \times 4) = 1,0359$$

Constantes de ranhuras do estator:

Ranhura 3:  $K_s = 1,229$

Ranhura 2:  $K_s = 1,129$

Ranhura 1:  $K_s = 0,929$

$$K_{sp_{\text{médio}}} = \frac{28 \times 1,229 + 23 \times 1,229 + 15 \times 1,129}{28 + 23 + 15} = 1,206$$

$$K_{sp_{\text{médio}}} = \frac{9 \times 1,229 + 15 \times 1,129 + 22 \times 0,929}{9 + 15 + 22} = 1,053$$

$$l_{sp} = \frac{2\mu_0(528 \times 0,832)^2 \times 1,0201 \times 0,12 \times 1,189}{32} = 0,00220665 \text{ H}$$

$$l_{sa} = \frac{2\mu_0(368 \times 0,849)^2 \times 1,0359 \times 0,12 \times 1,009}{32} = 0,00096189 \text{ H}$$

Indutância de dispersão da barra do rotor:

$$b/a_2 = 1,653 \quad e \quad a_1/a_2 = 1,236 \quad \Rightarrow \quad F = 0,53$$

$$H_p = \frac{528 \times 0,832 \times 2 \times 0,96}{44 \times 0,1493} \quad \bar{I}_p = 128,39 \quad I_p$$

$$H_a = \frac{368 \times 0,849 \times 2 \times 0,96}{44 \times 0,1493} \quad I_a = 91,32 \quad I_a$$

$$H_o = H_p = 128,39 \times 6,45 = 828,14 \quad \Rightarrow$$

$$K_{sp0}'' = 0,171 \times 10^5 \quad 828,14^{(-1,4087+0,1037 \log 828,14)} = 10,123 \quad \Rightarrow$$

$$K_{sp0} = 0,53 + 10,123 = 10,653$$

$$l_{b0} = \mu_o \times 0,12 \times 10,653 = 1,60643 \times 10^{-6} \quad H$$

$$H_1 = (528 \times H_{p1} + 368 \times H_{a1})/896$$

$$H_1 = (528 \times 128,39 \times 46,6 + 368 \times 91,32 \times 27,6)/896 = 4560,86$$

$$K_{sp1p}'' = 0,171 \times 10^5 \quad 4560,86^{(-1,4087+0,1037 \log 4560,86)} = 2,465 \quad \Rightarrow$$

$$K_{sp1a}'' = 4,377$$

$$K_{sp1} = 0,53 + 2,465 = 2,995$$

$$l_{b1} = \mu_o \times 0,12 \times 2,995 = 4,51635 \times 10^{-7} \quad H$$

Correção devido à penetração de fluxo:

$$K_x = \frac{3}{1,478} \frac{[\text{sh}(1,478) - \text{sen}(1,478)]}{[\text{ch}(1,478) - \cos(1,478)]} = 0,993.$$

Indutância de dispersão de cabeça de bobina do estator:

$$l_{cbp} = \frac{3(264)^2 \times 0,315 \times 0,832^2}{2\pi \times 10^7 \times 4} \left[ 1,0 + 0,5(1,6 + \frac{0,8}{2}) \right] = 0,00024187 \quad H$$

$$l_{cba} = \frac{3(184)^2 \times 0,315 \times 0,849^2}{2\pi \times 10^7 \times 4} \left[ 1,0 + 0,5(1,3 + \frac{0,8}{2}) \right] = 0,00011317 \quad H$$

Indutância de dispersão de segmento de anel do rotor:

$$l_{cbr} = \frac{44 (1/2)^2 \times 0,158}{2\pi \times 10^7 \times 16} \left[ \frac{\pi \times 9,96 \times 2,116}{1,7 \times 1,0 + 1,2 \times 1,455 + 1,4 \times 2,116} \right] \left[ 4 \text{ sen}^2 \frac{2\pi}{44} \right]$$

$$\Rightarrow l_{cbr} = 9,27199 \times 10^{-10} H$$

Coeficientes de Carter:

$$K_{cest} = \frac{9,817(5 \times 0,45 + 2,7)}{9,817(5 \times 0,45 + 2,7) - 2,2^2} = 1,1765 \quad e$$

$$K_{crot} = \frac{7,076(5 \times 0,45 + 0,1)}{7,076(5 \times 0,45 + 0,1) - 0,1(0,5 \times 0,45 + 0,1)} = 1,0020$$

$$K_c = K_{cest} K_{crot} = 1,1788$$

Comprimento de entreferro corrigido pelo Coeficiente de Carter:

$$\delta' = 1,1788 \times 0,00045 = 0,00053046 \text{ m}$$

Fator de saturação:

A curva de saturação é apresentada na Figura VIII.5

Regiões de queda de força magnetomotriz:

Coroa do estator:

$$\text{Área: } A_1 = 2 \ l_{ce} = 2 \times 0,12 \times 0,011375 = 0,00273 \text{ m}^2$$

$$\text{Comprimento: } l_1 = \pi(Ree - l_{ce}/2)/P = \pi(0,080 - 0,11375/2)/4 = 0,05836 \text{ m}$$

$$\text{Densidade de fluxo: } B_1 = \frac{\phi}{0,9 \times 0,00273} \text{ (Wb/m}^2\text{)}$$

Dentes do estator:

$$\text{Área: } A_2 = \frac{l \ S_1 \ t_1}{P} = \frac{0,12 \times 28 \times 0,0044}{4} = 0,003696 \text{ m}^2$$

$$\text{Comprimento: } l_2 = h_{de} + l_{ce}/2 = 15,375 + 11,375/2 = 21,063 \text{ mm}$$

$$\text{Densidade de fluxo: } B_2 = \frac{\phi}{0,637 \times A_2} = \frac{\phi}{0,00235} \text{ (Wb/m}^2\text{)}$$

Entreferro da máquina:

$$\text{Área: } A_g = \frac{1}{P} \frac{2\pi R_m}{4} = \frac{0,12 \times 2\pi \times 0,049775}{4} = 0,009382 \text{ m}^2$$

$$\text{Comprimento: } l_g = g_e = 0,00053046 \text{ m}$$

$$K_p = (1 - P/100) = 0,96 \Rightarrow K_r = K_p^2 = 0,96^2 = 0,9216$$

$$\text{Densidade de fluxo: } B_g = \frac{0,9216\phi}{0,637 \times A_g} = \frac{\phi}{0,00648} \text{ (Wb/m}^2\text{)}$$

Dentes do rotor:

$$\text{Área: } A_4 = \frac{1}{P} \frac{S_2 t_2}{4} = \frac{0,12 \times 44 \times 0,003}{4} = 0,00396 \text{ m}^2$$

$$\text{Comprimento: } l_4 = h_{dr} + l_{cr}/2 = 8,65 + 19,9/2 = 18,6 \text{ mm}$$

$$K_c = K_p/(2 - K_r) = 0,8902$$

$$\text{Densidade de fluxo: } B_4 = \frac{\phi K_c}{0,637 \times A_4} = \frac{\phi}{0,00283} \text{ (Wb/m}^2\text{)}$$

Coroa do rotor:

$$\text{Área: } A_5 = 2 l l_{cr} = 2 \times 0,12 \times 19,9 \times 10^{-3} = 0,004776 \text{ m}^2$$

$$\text{Comprimento: } l_5 = \frac{\pi(R_{eixo} + l_{cr}/2)}{4} = \frac{\pi(0,0105 + 0,0199/2)}{4} = 0,01606 \text{ m}$$

$$\text{Densidade de fluxo: } B_5 = \frac{\phi K_c}{A_5} = \frac{\phi}{0,00537} \text{ (Wb/m}^2\text{)}$$

Fluxo Polar:

$$K\phi = \frac{V - I_1 r_1 \cos \phi}{V} = \frac{220 - 6,45 \times 1,5524 \times 0,22}{220} = 0,990$$

$$\phi = \frac{220 \times 0,990}{4,44 \times 60 \times 264 \times 0,832} = 0,003722 \text{ Wb}$$

	B (Wb/m <sup>2</sup> )	H (A esp/m)	f <sub>mmpico</sub> (A esp)
Coroa do estator	1,5149	704	41,45
Dentes do estator	1,5838	1112	23,42
Entreferro	0,5740	456775	242,30
Dentes do rotor	1,3133	420	7,81
Coroa do rotor	0,6937	248	3,98



$$\Delta F_{mmt} = 318,96 \text{ A esp} \quad \text{e} \quad \Delta F_{mmar} = 242,30 \text{ A esp}$$

$$FSM = \frac{318,96}{242,30} = 1,3164$$

Reatância de magnetização do enrolamento principal:

$$X_m = 2\pi 60 \left( \frac{264 \times 0,832}{2} \right)^2 \frac{4\mu_o \times 0,12 \times 0,049775}{1,2282 \times \pi \times 0,00052942} = 66,86 \, \Omega$$

$$\phi = \frac{110 \times 0,990}{4,44 \times 60 \times 184 \times 0,849} = 0,00262 \text{ Wb}$$

	B (Wb/m <sup>2</sup> )	H (A esp/m)	f <sub>mmpico</sub> (A esp)
Coroa do estator	1,0637	157	12,96
Dentes do estator	1,1135	174	5,18
Entreferro	0,4361	347037	184,10
Dentes do rotor	1,0384	160	4,21
Coroa do rotor	0,6850	128	2,91

$$\Delta F_{mmt} = 209,36 \text{ A esp} \quad \text{e} \quad \Delta F_{mmar} = 184,10 \text{ A esp}$$

$$FSM = \frac{209,36}{184,10} = 1,1372$$

Reatância de magnetização do enrolamento auxiliar:

$$X_m = 2\pi 60 \left( \frac{184 \times 0,849}{2} \right)^2 \frac{4\mu_o \times 0,12 \times 0,049775}{1,1372 \times \pi \times 0,00052942} = 36,50 \, \Omega$$

Dispersão zig-zag

$$l_{zzep} = \frac{\pi^2 \times 33,40}{12 \times 377} \left[ \frac{4 \times 2^2}{32^2} \right] = 0,00113855 \text{ H}$$

$$l_{zzea} = \frac{\pi^2 \times 18,25}{12 \times 377} \left[ \frac{4 \times 2^2}{32^2} \right] = 0,00062211 \text{ H}$$

$$l_{zzr} = \frac{\pi^2 \times 33,40}{12 \times 377} \left[ \frac{4 \times 2^2}{44^2} \right] = 0,000602211 \text{ H}$$

$$l_{zzb} = 4,57684 \times 10^{-8}$$

#### Parâmetros para simulação:

As bobinas do enrolamento principal podem ser ligadas originalmente em série (220 V) e em paralelo (110 V) e as bobinas do enrolamento auxiliar são ligadas em série (110 V). Nos cálculos simulados as bobinas do enrolamento auxiliar e do principal foram consideradas em série, não sendo considerado o fato de que nesse caso o enrolamento auxiliar fica ligado em paralelo com a metade do enrolamento principal.

Resistência do enrolamento principal do estator a 25°C = 1,2772 Ω

Coefficiente de variação da resistência do fio utilizado = .0040653 Ω/°C

Resistência a 42°C = 1,3655 Ω

O fabricante forneceu o valor de 1,4184 Ω (Apêndice C).

Resistência do enrolamento auxiliar do estator a 25°C = 1,6385 Ω

Coefficiente de variação da resistência do fio utilizado = .0040653 Ω/°C

Resistência a 42°C = 1,7517 Ω

O fabricante forneceu o valor de 1,8196 Ω (Apêndice C)

Resistência de uma barra da gaiola a 20°C =  $1,4036 \times 10^{-4}$

Resistência de uma barra da gaiola a 25°C =  $1,4254 \times 10^{-4}$

Resistência de uma barra da gaiola a 70°C =  $1,6242 \times 10^{-4}$

Esta resistência é corrigida internamente no programa de simulação devido ao efeito pelicular (Capítulo 7), que depende do escorregamento.

Resistência de um segmento de anel a 20°C =  $1,2498 \times 10^{-6}$

Resistência de um segmento de anel a 25°C =  $1,2692 \times 10^{-6}$

Resistência de um segmento de anel a 70°C =  $1,4462 \times 10^{-6}$

Indutância de dispersão de ranhura do enrolamento principal =  $2,20665 \times 10^{-3}$  H

Indutância de dispersão de cabeça de bobina do principal =  $0,24187 \times 10^{-3}$  H

Indutância de dispersão zig-zag do principal =  $1,13855 \times 10^{-3}$  H

Total de indutância de dispersão do enrolamento principal = .003587 H

Indutância de dispersão de ranhura do enrolamento auxiliar =  $0,96189 \times 10^{-3}$  H

Indutância de dispersão de cabeça de bobina do auxiliar =  $0,11317 \times 10^{-3}$  H

Indutância de dispersão zig-zag do auxiliar =  $0,62211 \times 10^{-3}$  H

Total de indutância de dispersão do enrolamento auxiliar = .001697 H

Indutância de dispersão (ranhura) de uma barra da gaiola

Para rotor bloqueado =  $4,51635 \times 10^{-7}$  H

Para rotor livre =  $1,60643 \times 10^{-6}$  H

Essa diferença é devido a saturação no ferro sobre a ranhura. Ela é corrigida internamente no programa de acordo com a corrente de carga.

Indutância de dispersão zig-zag de uma barra da gaiola =  $4,57684 \times 10^{-8}$  H

Total de indutância de dispersão da barra:

Para rotor bloqueado =  $4,9740 \times 10^{-7}$  H

Para rotor livre =  $1,6522 \times 10^{-8}$  H

Indutância de dispersão de segmento de anel =  $9,27199 \times 10^{-10}$  H

Fator de saturação a vazio = 0,7628

Fator de saturação com rotor bloqueado = 1.0000

Corrigidos internamente no programa conforme a corrente de carga

Os demais parâmetros são calculados internamente no programa de simulação.

### B.3 Motor trifásico de gaiola dupla.

**Máquina 3 - Fontes: Planilha de Dados e Ensaio Anel (Equacional)**

**Medições na Máquina Existente no LAMEP**

**Principais dados:**

Motor Anel - Equacional - Classe - Tipo

MOD - FS = - ISOL F/A - CAT

Potência - 5,0 CV, Tensão 220/380 V, Corrente 13,0/7,5 A

Frequência - 50/60 Hz,  $\cos \phi =$  e ligação  $\Delta\Delta/YY$

Nº de polos - P = 4

Ranhuras do estator -  $S_1 = 48$

Ranhuras do rotor -  $S_2 = 58$

Condutores por ranhura no estator - 53

Nº de grupos - 12 grupos de 4 bobinas, cada uma com 26/27/27/26 espiras e  
passo 1:11

Bitola do condutor - 1 fio 20 AWG + 1 fio 21 AWG

Enrolamentos distribuídos

Comprimento do pacote do estator -  $l_e = 85 \text{ mm}$

Comprimento do pacote do rotor -  $l_r = 89 \text{ mm}$

Raio externo do estator -  $R_{ee} = 120 \text{ mm}$

Raio do furo do estator -  $R_{ie} = 75 \text{ mm}$

Raio externo do rotor -  $R_{er} = 74,6 \text{ mm}$

Espessura do entreferro -  $\delta = 0,4 \text{ mm}$

Seção transversal da ranhura do estator -  $Se_1 = 173,96 \text{ mm}^2$

Seção transversal das barras do rotor:

Gaiola externa -  $S_{re} = 10,52 \text{ mm}^2$

Gaiola interna -  $S_{ri} = 10,03 \text{ mm}^2$

Comprimento das barras -  $l_b = 105 \text{ mm}$

Raio externo dos anéis da gaiola:

Gaiola externa -  $R_{eea} = 73,8 \text{ mm}$

Gaiola interna -  $R_{eia} = 53,8 \text{ mm}$

Raio interno dos anéis da gaiola:

Gaiola externa -  $R_{iea} = 65,86 \text{ mm}$

Gaiola interna -  $R_{iia} = 46,26 \text{ mm}$

Espessura dos anéis:

Gaiola externa -  $e_e = 7,94 \text{ mm}$

Gaiola interna -  $e_i = 7,54 \text{ mm}$

Altura dos dentes do estator -  $h_{de} = 27,1 \text{ mm}$

Altura dos dentes do rotor:

Gaiola externa -  $h_{dre} = 4,8 \text{ mm}$

Gaiola interna -  $h_{dri} = 27,9 \text{ mm}$

Raio do eixo -  $R_{eixo} = 24,0 \text{ mm}$

Largura da coroa do estator -  $l_{ce} = 17,9 \text{ mm}$

Largura da coroa do rotor -  $l_{cr} = 22,7 \text{ mm}$

Largura do dente do estator -  $t_1 = 4,628 \text{ mm}$

Largura do dente do rotor -  $t_2 = 4,770 \text{ mm}$  (médio)

Raio médio de entreferro -  $R_m = 74,8 \text{ mm}$

Momento de inércia -  $J =$

Coefficiente de atrito -  $B =$

Resistividade do cobre a  $20^\circ\text{C}$  -  $\rho = 1,7240 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$

Coefficiente de temperatura do cobre -  $3,9 \times 10^{-3} (1/^\circ\text{C})$

Parâmetros para simulação:

Resistência do estator:

$$De = 0,15 + 0,0271 + 0,0006 + 0,0028 = 0,1805 \text{ m}$$

$$LMC = 0,085 + (0,1805 \times 1,5 \times \pi \times 10)/48 = 0,280 \text{ m}$$

$$\rho(1 \text{ fio } 21 // 1 \text{ fio } 20 \text{ a } 25^\circ\text{C}) = \frac{1}{\frac{1}{0,03396} + \frac{1}{0,04281}} = 0,01894 \Omega\text{m}$$

$$Rs = 0,280 \times 848 \times 0,01894 = 4,4959 \Omega \text{ a } 25^\circ\text{C}$$

Resistência da barra:

$$\text{Gaiola externa: } r_{be}(20^\circ\text{C}) = \frac{1,724 \times 10^{-8} \times 0,1275}{8,296 \times 10^{-6}} = 2,6496 \times 10^{-4} \Omega$$

$$\text{Gaiola interna: } r_{bi}(20^\circ\text{C}) = \frac{1,724 \times 10^{-8} \times 0,1275}{10,03 \times 10^{-6}} = 2,1909 \times 10^{-4} \Omega$$

Resistência de segmento de anel:

Gaiola externa:

$$\ell_{ae} = 2\pi(0,07380 - 0,00794/2) = 0,4388$$

$$s_e = (6,83 \times 10^{-3})^2 = 4,6625 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$R_{ae} = \frac{1,724 \times 10^{-8} \times 0,4388}{4,6625 \times 10^{-5}} = 1,6225 \times 10^{-4} \Omega$$

$$r_{ae} (20^\circ\text{C}) = R_a/58 = 2,7974 \times 10^{-6} \Omega$$

Gaiola interna:

$$\ell_{ai} = 2\pi(0,0538 - 0,00754/2) = 0,3143 \text{ m}$$

$$s_i = (6,48 \times 10^{-3})^2 = 4,2046 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$R_{ai} = \frac{1,724 \times 10^{-8} \times 0,3143}{4,2046 \times 10^{-5}} = 1,2887 \times 10^{-5} \Omega$$

$$r_{ae} (20^\circ\text{C}) = R_a/58 = 2,2219 \times 10^{-6} \Omega$$

Fator de enrolamento:

$$K_w = \frac{26\text{sen}(106,36^\circ) + 27\text{sen}(90^\circ) + 27\text{sen}(73,64^\circ) + 26\text{sen}(57,27^\circ)}{(26 + 27 + 27 + 26)} = 0,9408$$

Fator de distribuição de dispersão:  $C_{xp} = 0,9375$

Constante de ranhura de estator:

$$b/a_2 = 19,6/(2 \times 4,1) = 2,390 \text{ e } a_1/a_2 = 2,8/4,1 = 0,683 \Rightarrow F = 1,30$$

$$d/e = 0,6/2,5 = 0,24 \text{ e } K_{s1} = 1,30 + 0,24 + \frac{\pi}{4} \frac{\cos^{-1}(e/2R)}{90} \Rightarrow$$

$$K_{s1} = 1,54 + 0,73 = 2,09$$

Constante de ranhura de estator:

$$\text{Gaiola externa: } K_{s2e} = 0,8/1,5 + 0,623 = 1,156$$

$$\text{Gaiola interna: } K_{s1e} = 7,1/(3 \times 2,1) + 16/1,2 = 14,460$$

Indutância de dispersão de ranhura do estator:

$$l_s = \frac{3\mu_0(848 \times 0,9256)^2 \times 0,9375 \times 0,085 \times 2,27}{48} = 8,7594 \times 10^{-3} \text{ H}$$

Indutância de dispersão da barra do rotor:

$$\text{Gaiola externa: } l_{be} = \mu_0 \times 0,1275 \times \left[ \frac{0,8}{3,0} + 0,623 \right] = 1,4254 \times 10^{-7} \text{ H}$$

$$\text{Gaiola interna: } l_{bi} = \mu_0 \times 0,1275 \times \left[ \frac{16}{1,2} + \frac{7,1}{3 \times 2,1} \right] = 2,3169 \times 10^{-6} \text{ H}$$

Indutância de dispersão de cabeça de bobina do estator:

$$l_{cb1} = \frac{3(424)^2 \times 0,315 \times 0,9256^2}{2\pi \times 10^7 \times 4} \left[ 3 + 0,5(6,5 + 0,5) \right] = 3,7643 \times 10^{-3} \text{ H}$$

Indutância de dispersão de segmento de anel:

Gaiola externa:

$$l_{cb2e} = \frac{58 \times 0,400}{2\pi \times 10^7 \times 16} \left[ 2 \times 4 \times 1,13 + \frac{\pi \times 14,96 \times 1,580}{1,7 \times 0,794 + 1,2 \times 0,794 + 1,4 \times 1,580} \right] \left[ 4\text{sen}^2 \frac{2\pi}{58} \right]$$

$$\Rightarrow l_{cb2e} = 6,8759 \times 10^{-9} \text{ H}$$

Gaiola interna:

$$l_{cb2i} = \frac{58 \times 0,400}{2\pi \times 10^7 \times 16} \left[ 2 \times 4 \times 1,17 + \frac{\pi \times 14,96 \times 15,83}{1,7 \times 0,754 + 1,2 \times 0,754 + 1,4 \times 15,83} \right] \left[ 4\text{sen}^2 \frac{2\pi}{58} \right]$$

$$\Rightarrow l_{cb2i} = 1,0768 \times 10^{-8} \text{ H}$$

Indutância de dispersão mútua entre barras:

$$l_{be1} = \mu_0 \times 0,127 \left[ \frac{0,623}{2} + \frac{0,8}{1,5} \right] = 1,8526 \times 10^{-7}$$

Coefficientes de Carter:

$$K_{cest} = \frac{0,009817(5 \times 0,0004 + 0,0025)}{0,009817(5 \times 0,0004 + 0,0025) - 0,0025^2} = 1,1648$$

$$K_{crot} = \frac{0,008081(5 \times 0,0004 + 0,0015)}{0,008081(5 \times 0,0004 + 0,0015) - 0,0015^2} = 1,0864$$

$$K_c = K_{cest} \times K_{crot} = 1,2655$$

Comprimento de entreferro corrigido pelo Coeficiente de Carter:

$$\delta' = 1,2655 \times 0,0004 = 0,00050618 \text{ m}$$

Reatância de magnetização por ensaio a vazio:

$$I_p = \frac{272}{3 \times 220} = 0,412 \text{ A (desprezível)}$$

$$I_m = 6,56 \text{ A linha}$$

$$X_m = \frac{220 \sqrt{3}}{6,56} \left( \frac{60}{50} \right) = 69,704 \Omega$$

Estimativa do fator de saturação:

$$X_m = 2\pi f (3/2) (212 \times 0,9408/2) \left( \frac{4 \mu_0 \times 0,085 \times 0,748}{FSM \times \pi \times 0,00050618} \right) = 109,40/FSM$$

$$\Rightarrow 70,12 = 109,40/FSM \Rightarrow 1,6359$$

Reatância de dispersão zig-zag:

$$\text{Estator: } l_{zze} = 4 \times \frac{\pi^2 \times 70,12}{12} \left( \frac{4 \times 2^2}{48^2} \right) \frac{1}{2\pi 60} = 4,2494 \times 10^{-3} \text{ H}$$



$$\text{Rotor: } l_{zzr} = 4 \times \frac{\pi^2 \times 70,12}{12} \left( \frac{4 \times 2^2}{58^2} \right) \frac{1}{2\pi \cdot 60} = 2,9104 \times 10^{-3} \text{ H}$$

$$l_{zzb} = l_{zzr} \left[ \frac{58 \times 1/4}{3 \times 424^2 \times 0,9256^2} \right] = 9,1332 \times 10^{-8} \text{ H}$$

#### Parâmetros para simulação:

Todas as bobinas do estator estão originalmente ligadas em série.

Resistência dos enrolamentos do estator a 20°C = 4,4063 Ω

Coeficiente de variação da resistência do fio utilizado = .0040653 Ω/°C

Resistência a 27°C = 4.5317 Ω

Resistência a 73°C = 5.3732 Ω

O fabricante forneceu o valor de 4,76 Ω

Resistência de uma barra da gaiola externa a 20°C = 2,6496 × 10<sup>-4</sup>

Resistência de uma barra da gaiola externa a 27°C = 2,7250 × 10<sup>-4</sup>

Resistência de uma barra da gaiola externa a 120°C = 3,7267 × 10<sup>-4</sup>

Resistência de uma barra da gaiola interna a 20°C = 2.1909 × 10<sup>-4</sup>

Resistência de uma barra da gaiola interna a 27°C = 2.5232 × 10<sup>-4</sup>

Resistência de uma barra da gaiola interna a 120°C = 3,0816 × 10<sup>-4</sup>

Resistência de um segmento de anel da gaiola externa a 20°C = 2.7974 × 10<sup>-6</sup>

Resistência de um segmento de anel da gaiola externa a 27°C = 2.8770 × 10<sup>-6</sup>

Resistência de um segmento de anel da gaiola externa a 120°C = 3,9346 × 10<sup>-6</sup>

Resistência de um segmento de anel da gaiola interna a 20°C = 2,2219 × 10<sup>-6</sup>

Resistência de um segmento de anel da gaiola interna a 27°C = 2,2851 × 10<sup>-6</sup>

Resistência de um segmento de anel da gaiola interna a 120°C = 3,1252 × 10<sup>-6</sup>

Indutância de dispersão de ranhura do estator = 8,7594 × 10<sup>-3</sup> H

Indutância de dispersão de cabeça de bobina = 3,7643 × 10<sup>-3</sup> H

Indutância de dispersão zig-zag = 7,1598 × 10<sup>-3</sup> H

Total de indutância de dispersão do estator = 1,9683 × 10<sup>-2</sup> H

Indutância de dispersão (ranhura) de uma barra:

Da gaiola externa =  $1.4254 \times 10^{-7}$  H

Da gaiola interna =  $2,3169 \times 10^{-6}$  H

Indutância de dispersão de segmento de anel:

Da gaiola externa =  $6,8759 \times 10^{-9}$  H

Da gaiola interna =  $1.0768 \times 10^{-8}$  H

Indutância de dispersão mútua de segmento de anel =  $6.6226 \times 10^{-9}$  H

Indutância de dispersão mútua de barras =  $1,8526 \times 10^{-7}$  H

Fator de saturação a vazio = 0,6113

Fator de saturação com rotor bloqueado = 1,0000

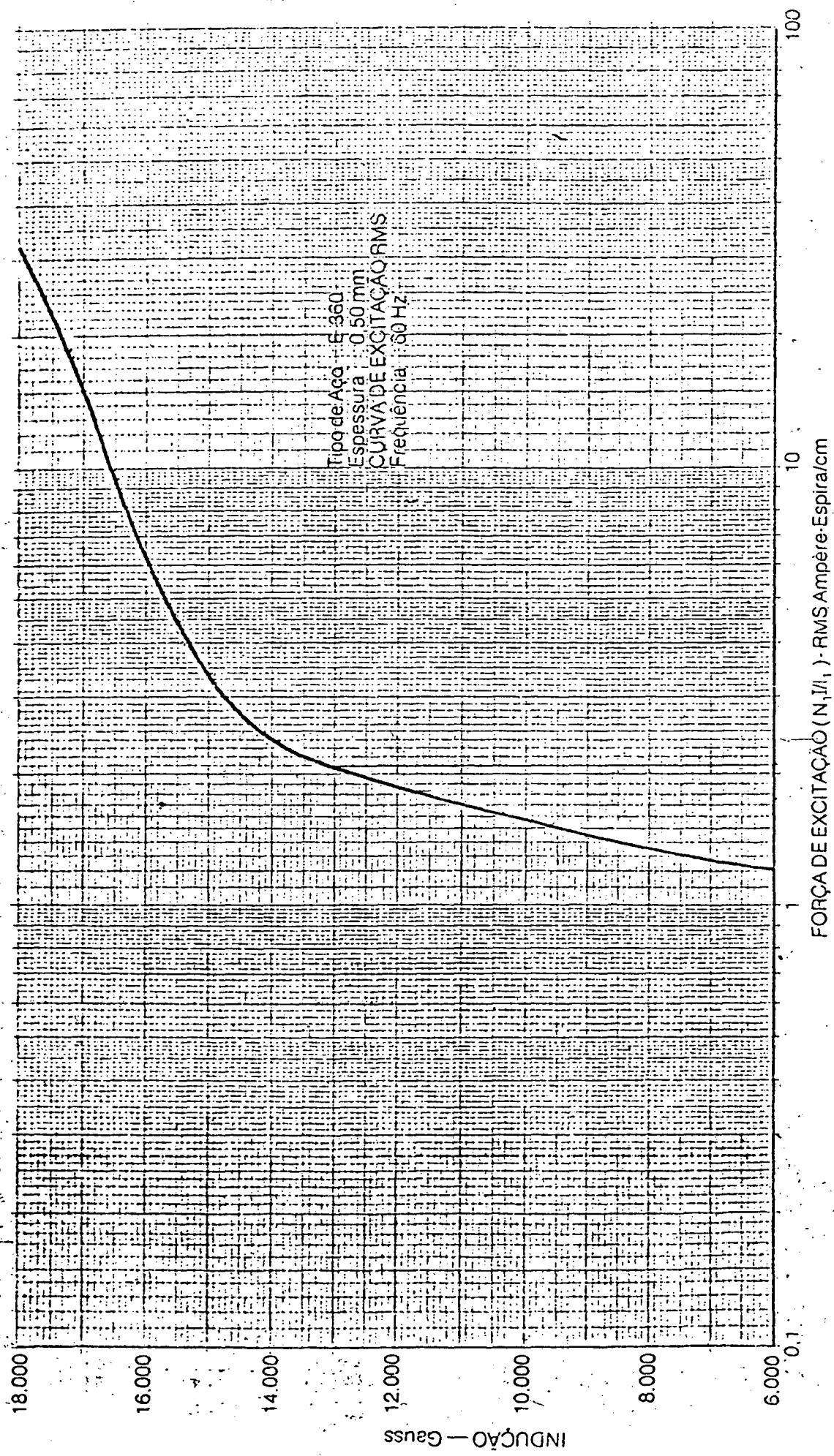
Corrigidos internamente no programa conforme a corrente de carga

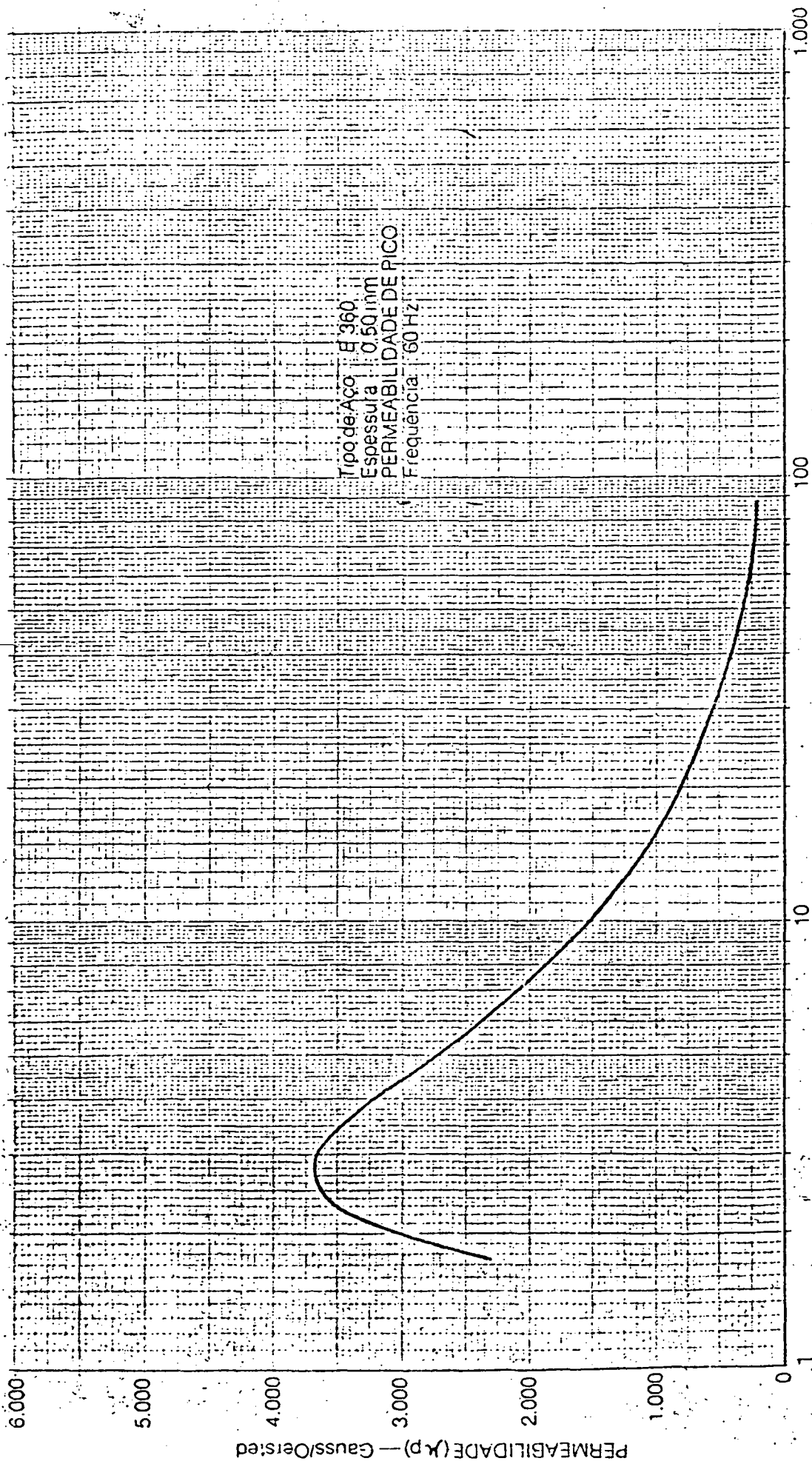
Os demais parâmetros são calculados internamente no programa de simulação.

## APÊNDICE C

APÊNDICE C

### DADOS DOS FABRICANTES





# ESPECIFICAÇÕES ELETROMECÂNICAS

## MOTORES TRIFÁSICOS DE INDUÇÃO — ROTOR DE CAIOLA

Nº 309.043.7237

Data: 19 JUN 86

### IDENTIFICAÇÃO

ITEM 6004.7162

KW 1,5	Hz 60	IP/In 6,3
CV 2	PRIMÁRIO	FS 1,15
MOD 9DS	V 220 A 6,5 Lig T	cos $\phi$ 0,83
Nº	V 380 A 3,8 Lig Y	AMB °C
rpm 1720	V A Lig	ALT m
CAT N		$\Delta T$ °C
ISOL B		IP 54
REG S1		

### DIMENSÕES PRINCIPAIS

DIMENSÕES	ESTATOR	ROTOR	Chapa de aço 1008 espes. 0,61
Ø Externo	140	91,90	Entreferro 0,30
Ø Interno	92,50	30	Inclinação 8,1 + 1,60
Nº Ranhuras	36	44	Anel de Curto 7,0 X 14,7 ligo AL-99,5%
Área da Ranhura	60,0	26,6	Pacote 90
Tratamento	SEM	SEM	Inversão de chapas no rotor ---

### ISOLAMENTOS DA RANHURA

DIMENSÕES	FUNDO DA RANHURA		ENTRE CAMADAS	FECHAMENTO DA RANHURA	
	REFORÇO	BASE		COBERTURA	CALÇO
Material Glasce (2)		R		B	
Comprimento		105		102	
Largura		25		10	
Espessura		0,19		0,25	
Área por motor	(m²)	0,0945 (m²)	(m²)	0,0367 (m²)	(m²)
Isolamento entre fases	peças	item	espesura	classe (2)	
Isolamento entre fases	0 peças	item	0 espessura 0,19	classe (2) R	
Borbante Nylon			Verniz de impregnação (2)	B ou F	

### ESPECIFICAÇÕES DE ENROLAMENTO

1 fios Ø 0,800 +	fios Ø	fios Ø	fios Ø
Nº Espiras 42			Nº Espiras
Passo 1: 8:10:12			Passo 1:
3 bobinas por grupo	2 grupos por fase		bobinas por grupo grupos por fase
Comodo Unica Ligação Serie			Comodo Ligação
Esquema 36-04-10/2-0			Esquema
Massa de cobre 1,45 +			Massa de cobre +
Enchimento 0,35			Enchimento
R <sub>1</sub> a 20°C 3,4757			R <sub>1</sub> a 20°C

### CABINHOS

CABINHO CLASSE (2) R			
BITOLA	AWG	COMPRIMENTO	QUANTIDADE
18		240	6

### ESPAQUETES

ESPAQUETE CLASSE (2) B		
DIÂMETRO	COMPRIMENTO	QUANTIDADE
1	90	12
4	40	2
5	45	6

(1) Proteção IP W 55 cfe. Norma WEG

(2) Materiais de Isol. cfe. Norma WEG

OBSERVAÇÕES:

1. The first part of the document is a list of names and titles, including "The Hon. Mr. Justice" and "The Hon. Mr. Justice".

2021. 1. 27. 11

Dados de Bobinagem		Indutor (com 0,065 x 20 x 20)		Características e pesos	
1 fio(s) diam = 0,800	mm	R1 = 3,4737	gms	Indução na coroa do estator	mmH
2 fio(s) diam = 1,1	mm	R2 = 0,5472		Indução na coroa do rotor	13016
Área de cobre = 0,503	cm <sup>2</sup>	R3 = 1,7857		Indução de dente do estator	11903
Esp. ímã: 42		R4 = 2,4953		Indução de dente do rotor	11485
Fuso Médio = 10		X1 = 3,2223		INDUÇÃO DE ENTREFERRO	5222
bobinas por grupo: 3		X2 = 3,4905		POTÊNCIA TOTAL ADQUIRIDA	303,96
Crescimento: Unica		X3 = 105,5508		CORRENTE A VAZIO	3,87
Comp. med. 14. esp = 350	mm			Perdas Joule no estator	45
Inclinação = 0,348°				Perdas no ferro	310
Fator enraizamento = 0,920				Perdas mecânicas	40
Comp. médio condut. = 197,9	mm			Perdas nos Rolamentos	6
Condutividade = 52	mm			Perdas no Ventilador	41
Pacote = 40	mm			Perdas por atrito	1,11

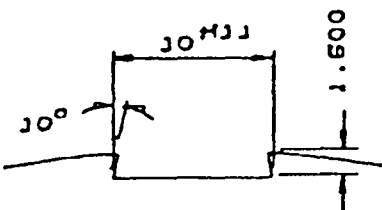
Características em carga a 130 (C)		Correntes p/ saturação (A)	
Pa/Fm	0.25	1.00	1.75
Kend. (Z)	53.1	73.5	49.0
COS FI	0.476	0.835	0.914
Rea	1778 oh	1732	1596
φ (Z)	1.251	2.453	3.775
Corr. (A)	3.614	4.415	5.249
Perdas. rotor bloqueado (Res. em Oms a 40 C)		Correntes p/ saturação (A)	
Efeito pelicular na resist.	= 1.0143	I'1 =	5.95
Efeito pelicular na resistência	= 0.9959	I'2 =	7.03
Resist. da barra na partida	= 1.9585		
Resistência total	= 4.4266		
Resist. do rotor na partida	= 2.6799		
Resistência total	= 4.2325		
Fator saturação - estator	= 0.4341		
Fator saturação - rotor	= 0.4533		
Fator saturação p/ permeância	= 0.4361		
Fat. sat. p/ perm. inclinação	= 0.3719		
Fat. queda p/ conj. partida	= 0.9143		

[illegible]

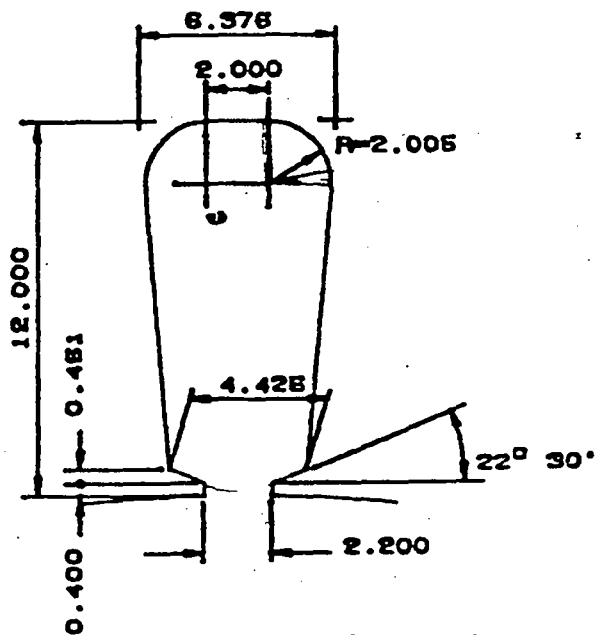
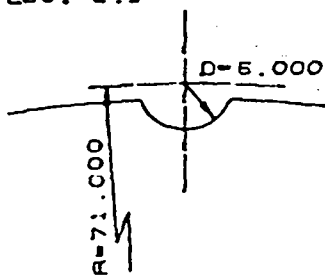
EXCUTANT POB: BOITLHO

1997, 1998, 1999

140 KB	140.028
	140.003
92.5 H7	92.530
	92.500
10 H11	10.020
	10.000



Esc. 2:1

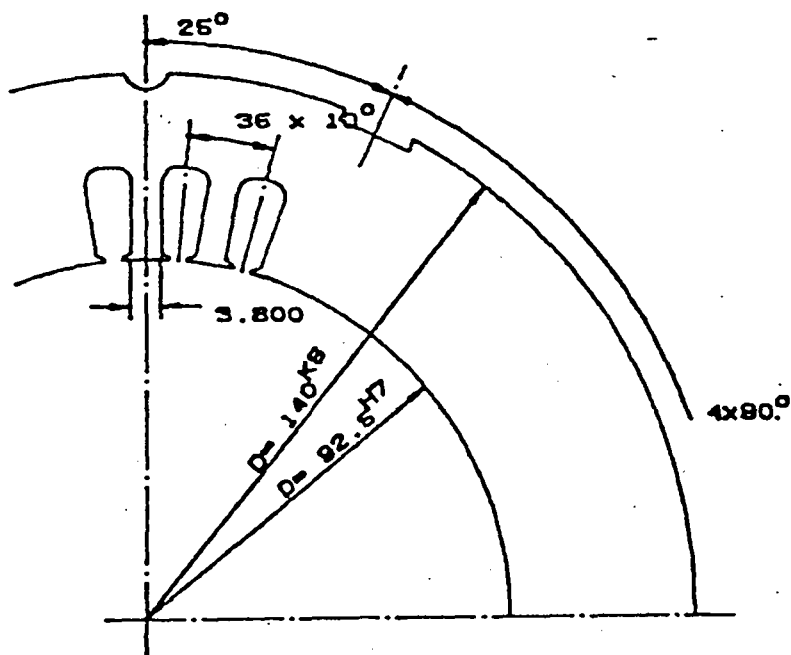


Esc. 4:1

Area da ranhura:

60.483 mm<sup>2</sup>

Raios n cot.: 0.5 mm



Esc. 1:1

NOR

VALORES NÃO ESPECIFICADAS

LIBER.

VERIF.

DESEN.

PROJ.

R. L. M.

LOC.

RESUMO DAS MODIFICAÇÕES

DATA

LIBER.

ESC.

CHAPA BOIV NORMAL

RMAS

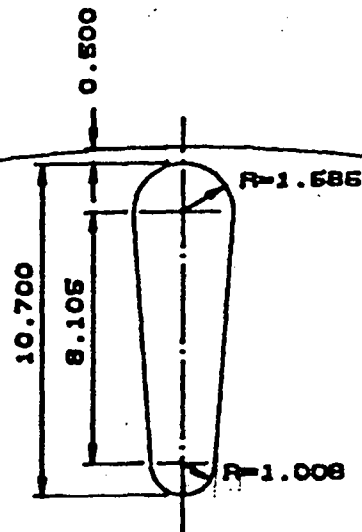
UPIDE



30 H7	30.000
	30.021

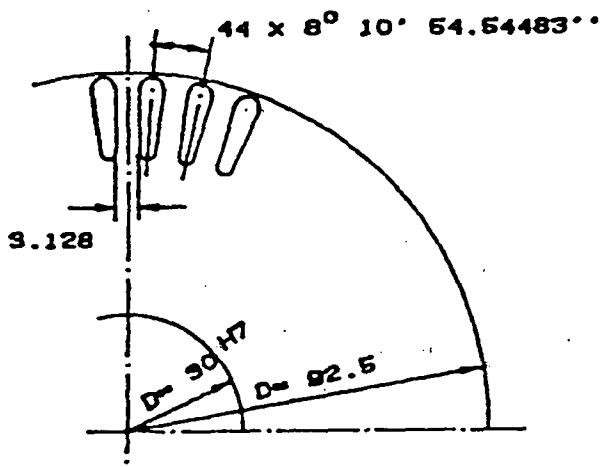
Entreferro: 0.300 mm

Arises nos cotados: 0.5 mm



**Esc. 4:1**

Área de ranhura:  
28.637 m<sup>2</sup>



ESC. 1:1

NOR.								
TITULO NÃO ESPECIFICADAS								
LIBER								
VERIF.								
DESEN.								
PROJ.			R. L. M.	LOC.	RESUMO DAS MODIFICAÇÕES		DATA	LIBER
ESC.	CHAPA BOIV NORMAL				RMAS			

# **CURVAS CARACTERISTICAS** **EM FUNÇÃO DA POTÊNCIA FORNECIDA**

Nº: 8117-2 R.

Data: 30/11/85

SÉRIE Nº  
POTÊNCIA 2.0 CV

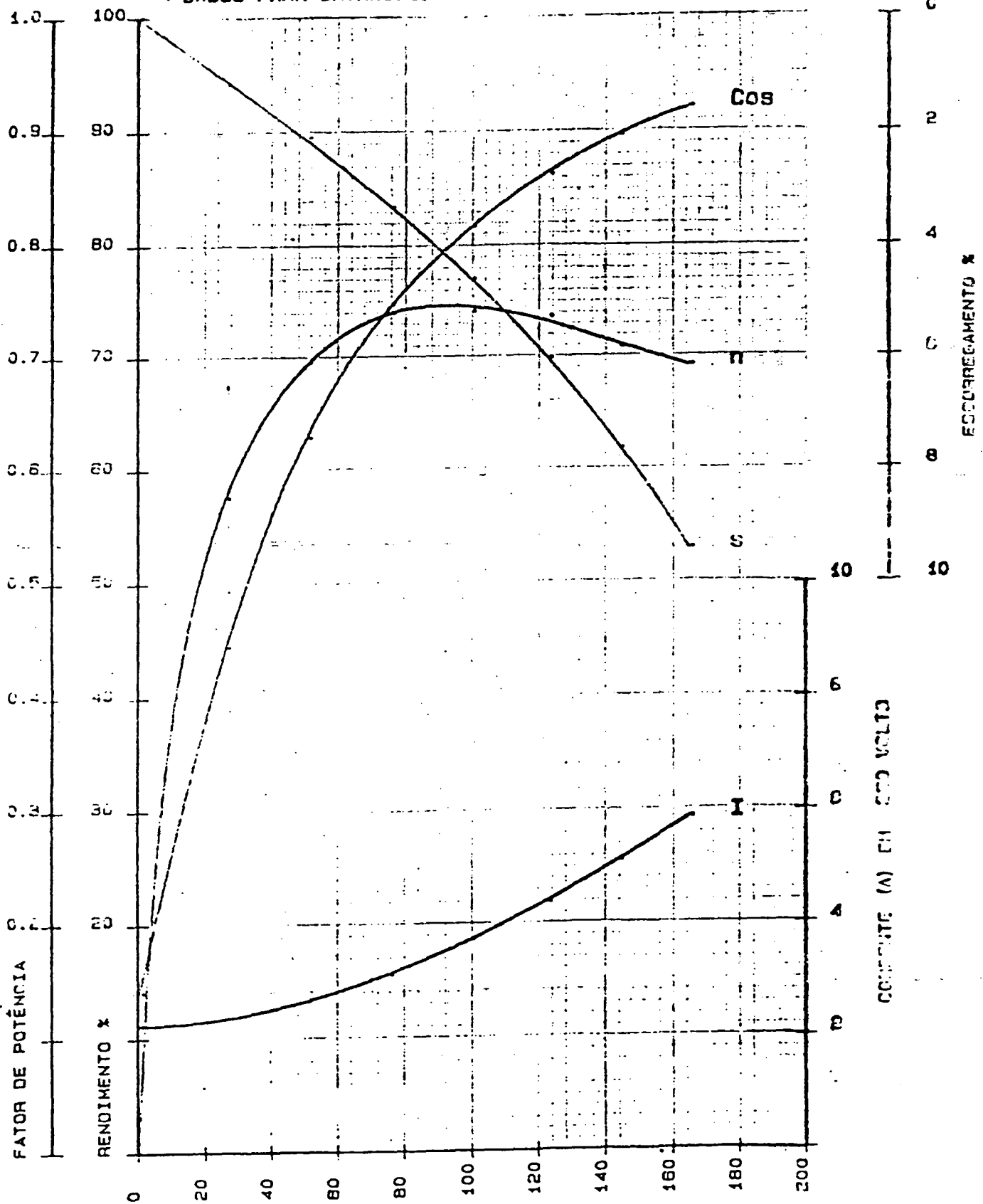
FASES 3  
V 220/380  
A 8.5/3.8

CATEGORIA II  
ISOL. CLASSE B  
REGIME S1  
PROTEÇÃO IPW 54  
Ip/In 6.3

MODELO 90 S  
ROTAÇÃO 1725 rpm  
FREQUÊNCIA 60 Hz

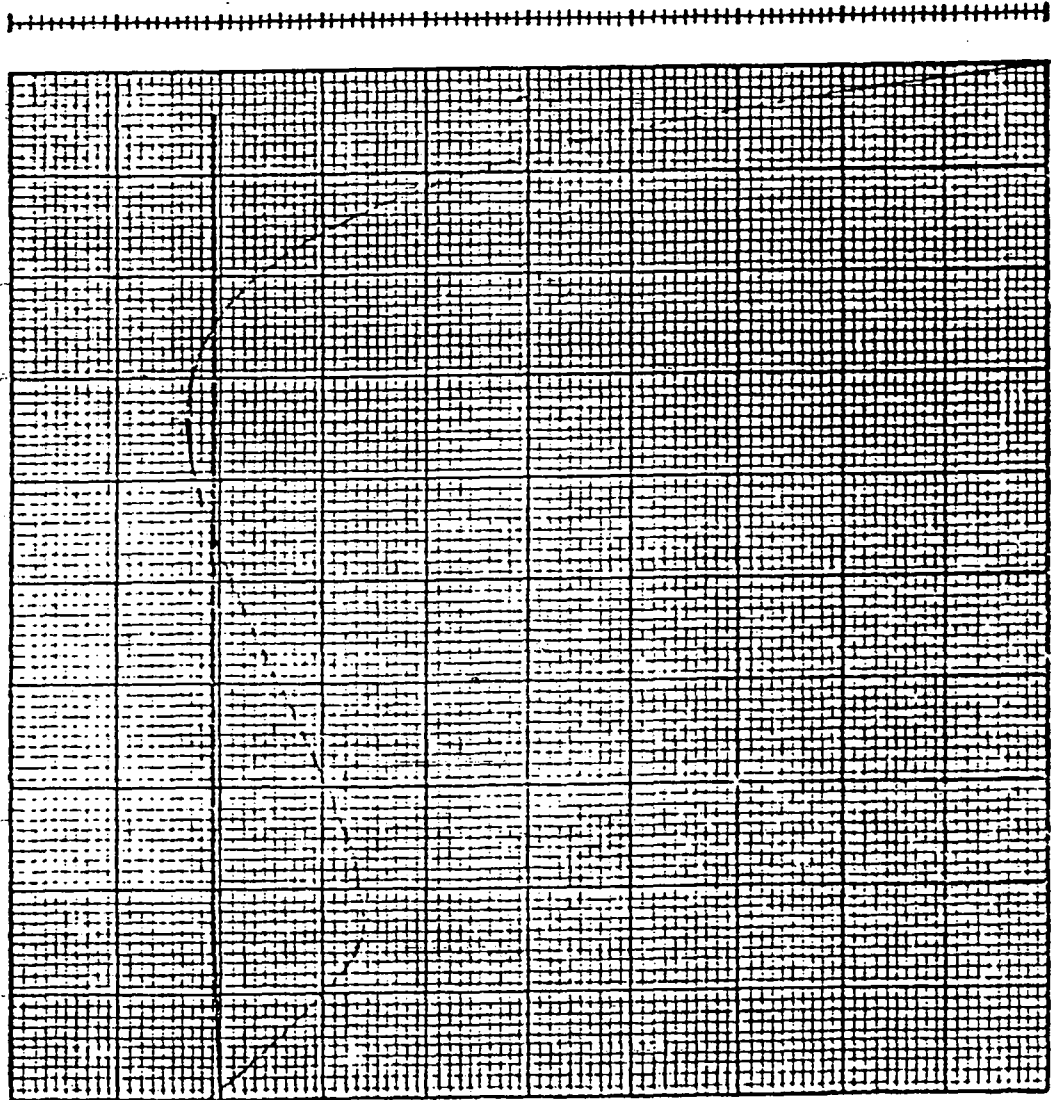
F.S. 1.15

## **DADOS PARA CATALOGOS**



CURVAS CARACTERÍSTICAS EM FUNÇÃO DA ROTAÇÃO

Nº 8113-1  
Data: 05-02-8



CONJUGADO, TENSÃO	X	ROTAÇÃO	<input checked="" type="checkbox"/>
CONJUGADO, CORRENTE	X	ROTAÇÃO	<input type="checkbox"/>

DADOS DE PLACA			
KW	F.S.	1,15	
CV	Categoria	N	
Modelo	Isol. Classe	B	
Rotação	rpm	31	
Frequência	Hz	60	
Fases	Ip/In	6,3	
V 220	A	6,5	
V 380	A	3,8	
V	A		

DADOS DO REGISTRADOR			
X =	2,5 V/cm	R1 =	700
Y1 =	2,5 mV/cm	R2 =	5K
Y2 =	0,25 V/cm	R3 =	80K
Capacitor	10	MFD	

DADOS DA CURVA			
Cp/Cn =	2,89	Ligação	Y
Cmín/Cn =	2,34	V no Parado	380
Cmáx/Cn =	2,94	Ip/In	
Cada Divisão =			
Cada Divisão =			

Observações: J: 0,1284 + 0,0468 = 0,1752

Aprovado			
Data			
Emissão	Revisão 0	Revisão 1	Revisão 2

Verificado

ROTAÇÃO EM PORCENTAGEM DA ROTAÇÃO SÍNCRONA

Data: 17-01-85

**horos**

## Principio

**EXERCISES**

**VERIFICADO**

**AÇOMPANHADO**

John

# DE INDUÇÃO TRIFÁSICOS

VERIFICADO: T. J. J.

Marco: **WEG** Forma construtivo: **B3M 1224** E.E. N°: **TP-JM 6.3**  
**2.0** cv **10** Pólos **Corcoco 90S** IP **54** ISOL **B** CAT. **A**  
 Hz **1720** rpm **Fs** **1** V **1** A REG. **51**  
**60** Hz **1725** rpm **Fs** **1.15** **1220 380 V 6.5 3.8** A cos  $\phi$

DIMENSÕES		ESTATOR	ROTOR	DADOS DE ENROLAMENTO			
Ø Externo				Peso Cu	kg	Bobinas por Grupo	
Ø Interno				espiras por bobina		passo 1:	
Entreferro				fiob) e	AWG +	fiob) e	AWG
Nº de Ranhuras				Tipo de Ligação: <input type="checkbox"/> Por Pólos <input type="checkbox"/> Pólos Conseq. <input type="checkbox"/> Danlander			
Área do Ranhuro				Ligação: <input type="checkbox"/> Comodo Duplo <input type="checkbox"/> Comodo Único			
Compr. Pacote							
Anel de Alumínio		X		Dinamômetro:			
Inclinação do Barro			mm	Conjunto de Medição N°			

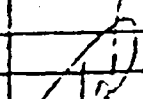
## ENSAIO EM VAZIO-SEM VENTILADOR

U	480	430	380	310	230	160	90		
e <sub>1</sub>	4.16	2.87	2.07	1.48	1.05	0.74	0.45	Circuito	
e <sub>2</sub>	4.32	2.91	2.06	1.43	1.02	0.70	0.40		
e <sub>3</sub>	3.93	2.65	2.84	1.36	1.00	0.64	0.40		
e <sub>P<sub>1</sub></sub>	57.3	34.5	109.0	65.2	36.2	17.5	7.0		
e <sub>P<sub>2</sub></sub>	-29.5	-19.0	-61.0	-37.0	-20.2	-8.7	-2.3		
cl	cp	1	20	1	4	1	4	1	4
R <sub>1</sub>	3.94	ra:	2.25	ENTR 1-4			4.16	ra:	2.55

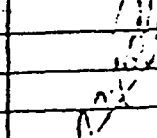
## ENSAIO EM VAZIO-COM VENTILADOR

U	410	430	380	310	230	160	90		
e <sub>1</sub>	4.20	2.86	2.06	1.47	1.07	0.78	0.52	Circuito	
e <sub>2</sub>	4.26	2.92	2.05	1.42	1.03	0.72	0.48		
e <sub>3</sub>	3.92	2.68	1.87	1.46	1.02	0.66	0.41		
e <sub>P1</sub>	59.0	34.8	113.5	65.1	37.0	19.0	8.0		
e <sub>P2</sub>	-29.8	-19.0	-61.0	-35.8	-18.9	-8.0	-1.2		
cl	cp	1	20	1	20	1	4	1	4
R <sub>1</sub>	3.84	ra: 27.0°c					4.1	ra: 26.5	

## ENSAIO EM CARGA-TENSÃO CONSTANTE

U	380	380	380	380	380	380	380	
e <sub>1</sub>	295	2,5	2,1	354	238	295	205	
e <sub>2</sub>	3,0	2,53	2,13	360	2,44	3,0	208	
e <sub>3</sub>	298	2,55	2,16	355	2,4	296	206	
e <sub>P1</sub>	33,5	27	21,2	31	10	21	-0,5	
e <sub>P2</sub>	56,8	48	40,5	68	43,8	56	33	
cl	cp	3 40	2 40	2 40	1 20	1 20	1 20	
R <sub>1</sub>	4,76	ra: 27,5					4,68	ra: 2,8
C	1 450	1.2 40	1,040	0,830	0,415	0,620	0,210	
n	1616	1652	1684	1713	1758	1736	1778	

## ENSAIO EM CARGA-CONJUGADO CONSTANTE

U	470	440	410	380	350	320	290	
e <sub>1</sub>	4,28	3,78	3,56	3,53	3,68	3,96	4,44	
e <sub>2</sub>	4,35	3,85	3,62	3,6	3,75	4,04	4,5	
e <sub>3</sub>	4,26	3,78	3,57	3,55	3,72	4,0	4,45	
e <sub>P1</sub>	16	23	27,5	31	33,8	36,5	38,5	
e <sub>P2</sub>	94,8	81	73,5	68	65,8	64	61,5	
cl	cp	20	20	20	20	20	20	
R <sub>1</sub>	4,168	ra: 2,8					4,9	ra: 2,85
C	0,830	0,830	0,830	0,830	0,830	0,830	0,830	
n	1748	1734	1707	1714	1696	1663	1621	

# ENSAIO DE CONJUGADO MÁXIMO

Ligação

U				380				
Cm <sub>0x</sub>				240				
n				1				

## ENSAIO COM ROTOR BLOQUEADO

Ligação

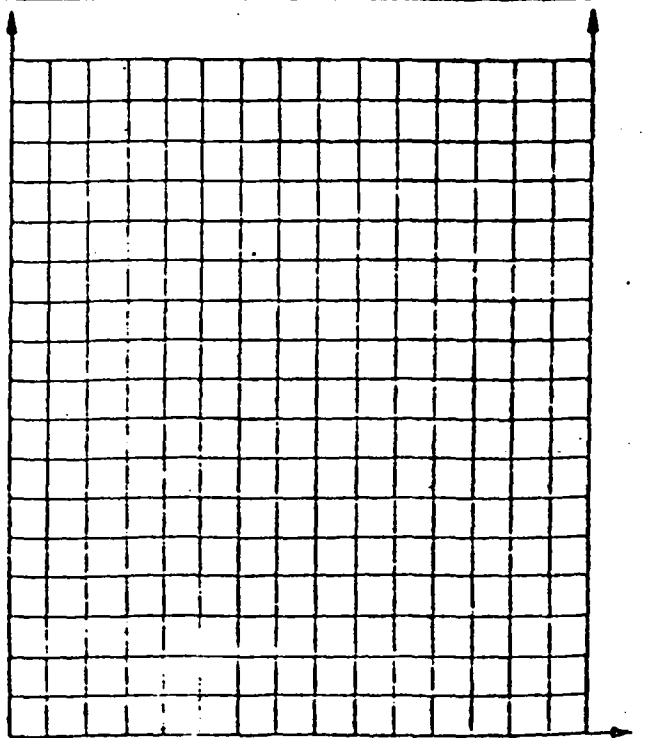
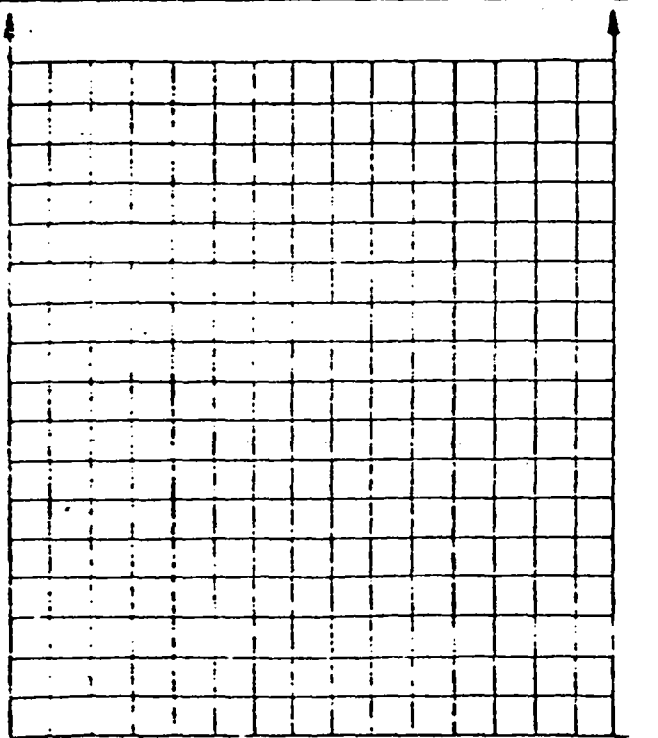
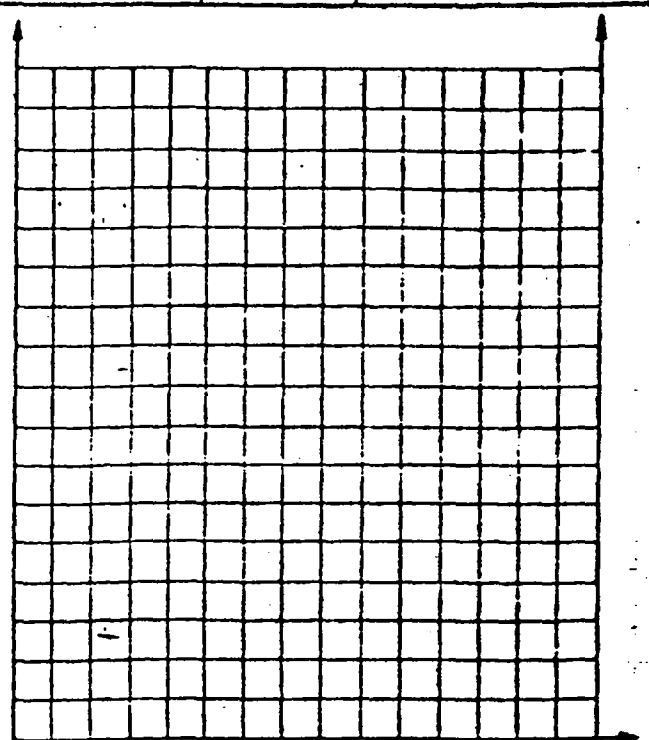
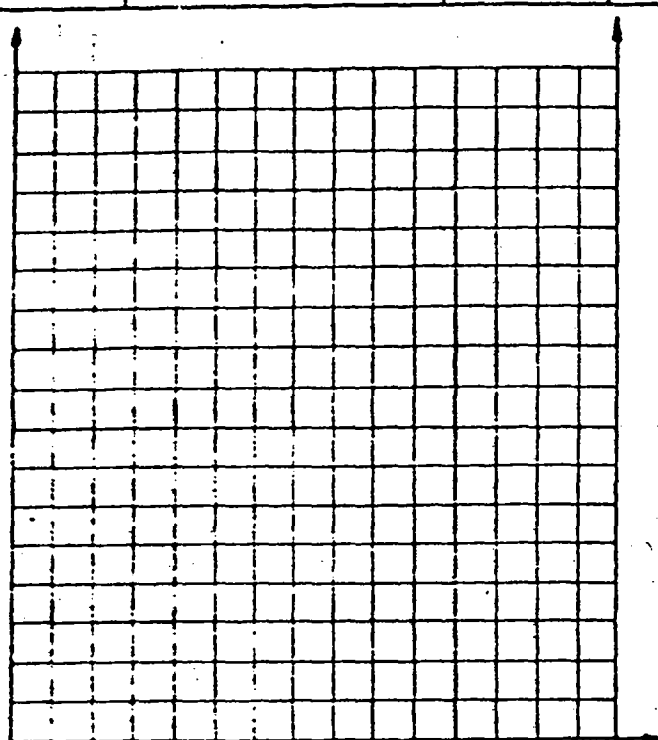
U			380	380	380			
e <sub>1</sub>			236	231	240			
e <sub>2</sub>			238	233	240			
e <sub>3</sub>			239	230	241			
e <sub>P1</sub>			21	21	21			
e <sub>P2</sub>			45	45	47			
cl	CP		10/200	10/200	10/200			
R <sub>1</sub>			434	420	46			
C <sub>p</sub>			2,3	2,5	2,4			
R <sub>1</sub>	4,32	Ω à 60 °C	R <sub>1</sub>		Ω à 75 °C	R <sub>1</sub>	4,76	Ω à 90 °C

11/200

## ENSAIO DE CONJUGADO MÍNIMO

Ligação

U		Cmin		n	
---	--	------	--	---	--



Cliente: \_\_\_\_\_ C.C Nº: \_\_\_\_\_  
Endereço: \_\_\_\_\_  
Forma Construtiva \_\_\_\_\_ Peso da Massa Aproximada \_\_\_\_\_ Kg

**IDENTIFICAÇÃO**

Modelo 56	Polância 1,5	CV	Fases 1Ø
Tensão / 110 / 220 V	Frequência 60	Hz	Fator Serviço 1,15
Corrente / / A	Categoria N		Rotação 1750 rpm
Ligação / / /	Proteção IP 21		Ip/In 5,0
Isolamento Classe B	Regime S -1		

**ENSAIOS**

**MEDICAÇÃO DAS RESISTÊNCIAS ÔHMICAS**

Terminais 1 - 2 = 0,8652 ohms Ta = 26 graus.

**ENSAIO EM VAZIO**

V	f	$\alpha_{I1}$	$\alpha_{I3}$	$\alpha_{IL}$	k <sub>IL</sub>	IL	Uc	$\alpha_P$	k <sub>P</sub>	P <sub>ev</sub> (W)
220	60	2,15			3	6,45		102	3	306
								172	3	516

**ENSAIO COM ROTOR BLOQUEADO** perdas= 210 w=0,28

Ligação	f	60	Hz	kI= 6	kP=						
V	$\alpha_{II}$	$\alpha_{I3}$	$\alpha_{IL}$	IL	Uc	$\alpha_P$	Pa (W)	Cpinket	Cn	Cp/Cn	Ip/In
208	7,3		44,1					1,29			
220				46,6				1,44	0,615	2,34	4,8

Elevação de Temperatura por Resistência a % da Potência Nominal °C

**ENSAIO EM CARGA**

kI1=		kI3=		Tensão 220		V		Frequência 60		Hz			
%	mkgf	$\alpha_{I1}$	$\alpha_{I3}$	$\alpha_{IL}$	k <sub>IL</sub>	IL	Uc	$\alpha_P$	k <sub>P</sub>	Fa (W)	rpm	Cos $\gamma$	$\eta$ %
100	0,61	1,6			6	9,6		252	6	1512	1755	0,71	73,0
75	0,45	1,4			6	8,4		202	6	1212	1765	0,65	68,3
50	0,30	1,22			6	7,32		152	6	912	1778	0,56	60,5

**ENSAIO EM CONJUGADO MÁXIMO**

V	f	C mkgf	Cn dx Cn	rpm	$\alpha_{I1}$	$\alpha_{I3}$	$\alpha_{IL}$	k <sub>IL</sub>	IL
212	60	1,23			4,3			6	25,8
220		1,32	2,14	1548					

**ENSAIO DE TENSÃO SUPORTÁVEL**

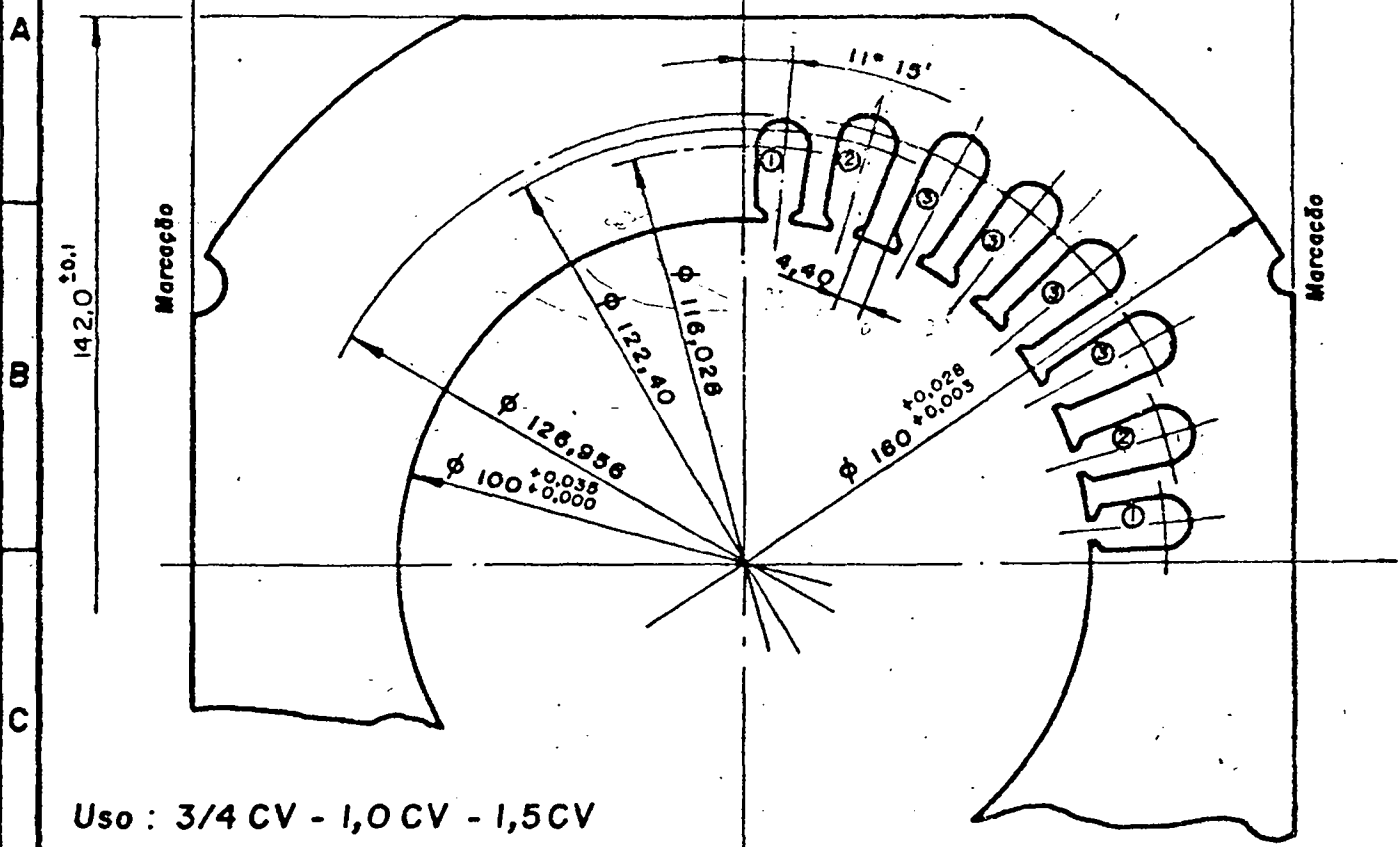
Aplicado kV Durante Segundos

Resistência de Isolamento: MΩ

Observações:

EXECUTADO \_\_\_\_\_ VERIFICADO \_\_\_\_\_ APROVADO \_\_\_\_\_ ACOMPANHADO \_\_\_\_\_

142.0 - v.



Uso : 3/4 CV - 1,0 CV - 1,5 CV

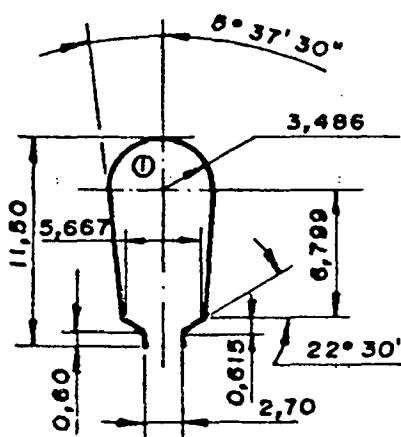
4 Polos - Monof.

MÁXIMA REBARBA=0,10mm.

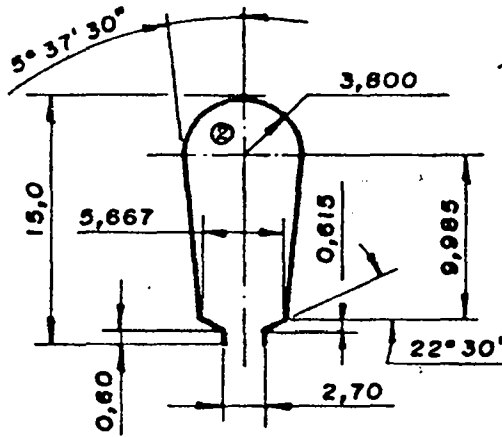
MÁXIMO DESLOCAMENTO=0,10mm.

ACO 1008 esp. 0,6<sup>+0,08</sup> (NBR 6658)

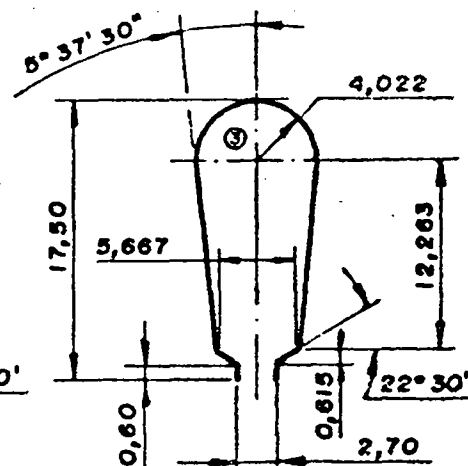
Código Punção = 1419



Area = 66,40mm<sup>2</sup>



Area = 93,30mm<sup>2</sup>



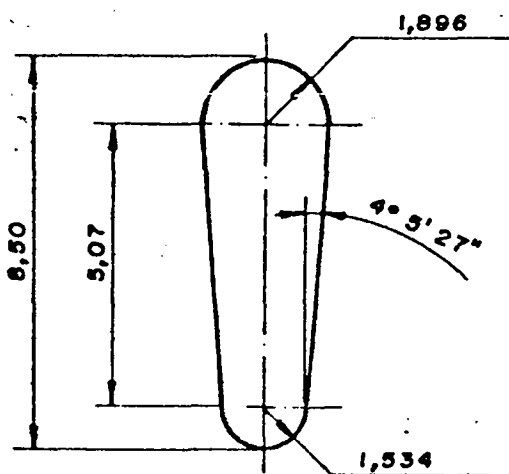
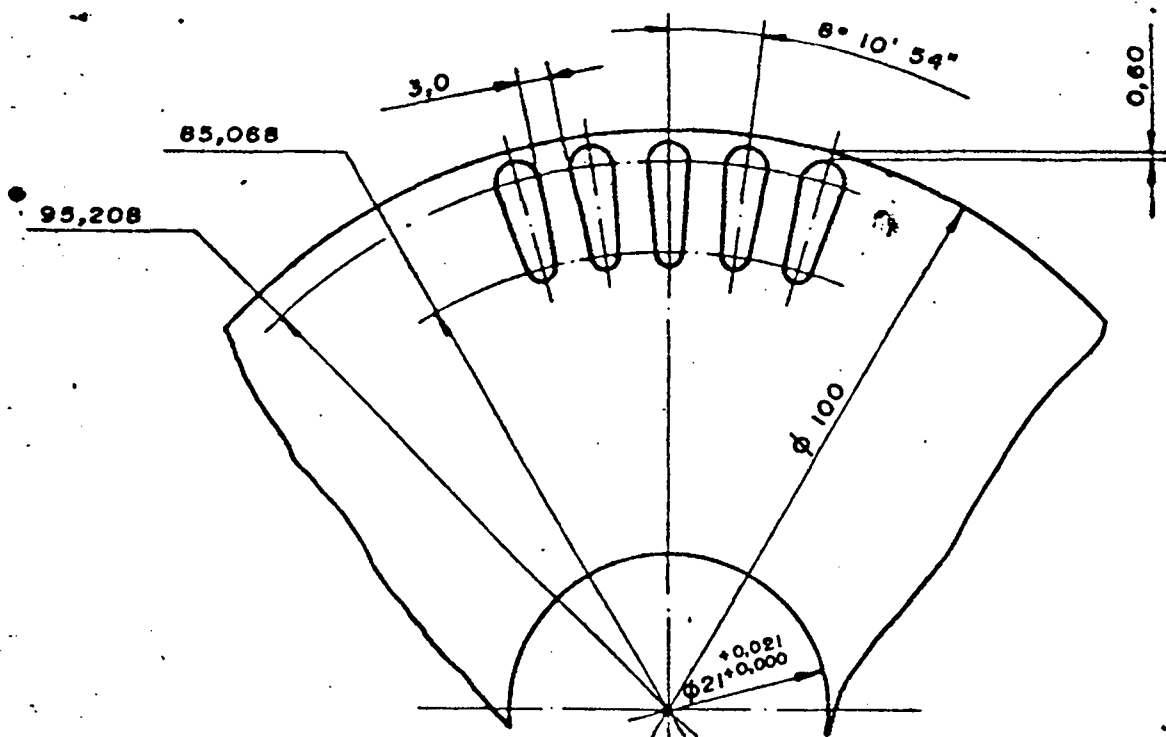
Area = 113,9mm<sup>2</sup>

Tolerância não Especificada Conforme NBR - 041.

	NOR																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
--	-----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3507 - 2070





ÁREA DA RANHURA • 26,80mm<sup>2</sup>

Nº DE RANHURAS • 44


MÁXIMA REBARBA=0,10mm.

AÇO 1008 esp. 0,6<sup>±0,08</sup> (NBR 6658)

Código Função = 2419

Uso: 3/4 CV - 1,0 CV - 1,5 CV  
4 Polos - Monof.

Tolerância não Especificada Conforme NBR - 041.

Quant.	Denominação		Material	Dimen. Espec.	Desenho
Projetado	10.11.88	Gdr			
Desenhado	14.11.88	Nilson R.			
Verificado	22.11.88	Gdr			
Aprovado					
			Substitua		
			Substituído: 3505-7064		
			Código: 3505-2061 → 1008		
			Número: 3505-2080		

Escala	CHAPA DO ROTOR
—	CHAPA: 160 - 32 - 100 - 44 - 21
	CARCAÇA: 56 - 4 Polos - Monof.





M O T O R

D E

I N D U C A O

*Mantovani*

## CALCULO DE RANHURAS ESTATOR E ROTOR

## RANHURA ESTATOR TIPO 3

## DADOS DE ENTRADA

De1 = 160.000  
 D = 100.000  
 N1 = 32  
 bo1 = 2.700  
 ho1 = 0.615  
 h21 = 0.190  
 bdi = 4.400  
 Beta1 = 22.500  
 KF = 0.950  
 h10 = 17.500

## DADOS DE SAIDA

Alfa1 = 5.6250  
 h11 = 0.6151  
 b11 = 5.6702  
 b31 = 8.6799  
 r21 = 4.0219  
 An1 = 113.8616  
 hc1 = 13.4909  
 h31 = 15.0890

## RANHURA ROTOR TIPO 1

## DADOS DE ENTRADA

De2 = 99.100  
 Di2 = 21.000  
 N2 = 44  
 KF = 0.950  
 ho2 = 0.600  
 bo2 = 0.600  
 h22 = 8.500  
 bd2 = 3.000

## DADOS DE SAIDA

Alfa2 = 4.0909  
 An2 = 26.2272  
 hn2 = 8.8115  
 r12 = 1.8594  
 Dr12 = 94.1812  
 r22 = 1.4921  
 Dr22 = 83.8842

## CALCULO ELETROMAGNETICO

## D A D O S D E E N T R A D A

POTENCIA.....(cv)=	1.500	SECAO ESPIRA PRINCIPAL.....=	1.570
NR. POLOS.....=	4	SECAO ESPIRA AUXILIAR.....=	0.785
FREQUENCIA.....=	60	DIAMETRO EXTERNO ANEL.....=	99.000
TENSAO FASE.....=	110.0	DIAMETRO INTERNO ANEL.....=	79.000
PACOTE.....=	120.000	ALTURA ANEL.....=	13.000
NR. LIGACAO.....=	2.00	TIPO DE CHAPA.....=	1
NR. CAMADAS.....=	1.0	TENSAO DE PARTIDA.....=	110.00
COND. PRINCIPAL.....(%) =	100.00	CORRENTE DE PARTIDA (Ip/In)=	5.000
COND. ROTOR.....(%) =	52.00	CORRENTE NOMINAL.....=	10.000
COND. AUXILIAR.....(%) =	100.00	FATOR DE POTENCIA NOMINAL..=	0.740
INCLINACAO.....=	1.00	CAPACITOR PARTIDA.....(MFD)=	540.0
NR. BOBINAS PRINCIPAL..=	3	NR. BOBINAS AUXILIAR.....=	3
Zp1 = 15    Zp2 = 23    Zp3 = 28		Zp4 = 0    Zp5 = 0    Zp6 = 0    Zp7 = 0	
ds1 = 4    ds2 = 6    ds3 = 8		ds4 = 0    ds5 = 0    ds6 = 0    ds7 = 0	
Za1 = 9    Za2 = 15    Za3 = 22		Za4 = 0    Za5 = 0    Za6 = 0    Za7 = 0	
da1 = 4    da2 = 6    da3 = 8		da4 = 0    da5 = 0    da6 = 0    da7 = 0	

## D A D O S D E S A I D A

## RESISTENCIA A PLENA CARGA, CIRCUITO MAGNETICO, POTENCIA E CORRENTE A VAZIO

FATOR DE ENROLAMENTO.....=	0.8321	INDUCAO ENTREFERRO (KGauss)=	5.8436
REDUCAO PASSO POLAR.....=	0.625	AMP. ESP. COROA ESTATOR(Ae)=	19.980
RESISTENCIA PRINCIPAL...(OHM)=	0.3408	AMP. ESP. DENTE ESTATOR(Ae)=	8.195
RESISTENCIA AUXILIAR...(OHM)=	1.8358	AMP. ESP. COROA ROTOR (Ae)=	3.790
RESISTENCIA BARRA.....(Ohm)=	0.3333	AMP. ESP. DENTE ROTOR (Ae)=	4.434
RESISTENCIA ANEL.....(Ohm)=	0.0873	AMP. ESP. ENTREFERRO...(Ae)=	159.740
RESISTENCIA ROTOR.....(Ohm)=	0.4206	AMP. ESP. TOTAL.....(Ae)=	196.138
PESO DA BOBINA PRINCIPAL..(Kg)=	1.693	FATOR DE SATURACAO.....=	1.0791
PESO DA BOBINA AUXILIAR..(Kg)=	0.573	CORRENTE DE MAGNETIZACAO(A)=	6.231
PESO DO ANEL.....(Kg)=	0.196	REATANCIA MAGNETIZACAO(Ohm)=	15.4351
PESO DA BARRA.....(Kg)=	0.374	PERDAS COROA ESTATOR.....(W)=	121.894
PESO DA GAIOLA.....(Kg)=	0.590	PERDAS DENTE ESTATOR.....(W)=	53.625
FLUXO MAGNETICO.....(MM)=	0.3759	PERDAS NO FERRO.....(W)=	175.519
ENTREFERRO.....(mm)=	0.4500	PERDAS MECANICAS.....(W)=	24.820
INDUCAO COROA ESTATOR(KGauss)=	11.944	PERDAS JOULE A VAZIO.....(W)=	52.930
INDUCAO DENTE ESTATOR(KGauss)=	14.381	PERDA TOTAL A VAZIO.....(W)=	253.269
INDUCAO COROA ROTOR (KGauss)=	4.618	CORRENTE A VAZIO.....(A)=	12.673
INDUCAO DENTE ROTOR (KGauss)=	14.602		

R E A T A N C I A		D E	P L E N A	C A R G A
ONSTANTE DE REATANCIA	=	0.2475	REAT. INCLINACAO BARRAS	(Ohm)= 0.2421
EAT. RANHURA ESTATOR (Ohm)=	0.2126	REAT. CABECA BOBINAS	(Ohm)=	0.1197
EAT. RANHURA ROTOR (Ohm)=	0.2608	REAT. PRIMARIA (ESTATOR)	(Ohm)=	0.5111
EAT. ZIG-ZAG ESTATOR (Ohm)=	0.1788	REAT. SECUNDARIA (ROTOR)	(Ohm)=	0.6283
EAT. ZIG-ZAG ROTOR (Ohm)=	0.1254	REAT. TOTAL DISPERSAO	(Ohm)=	1.1394

C A R A C T E R I S T I C A		C O M						C A R G A
	Pu/Pn=	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	
ENDIMENTO.....(%)=	48.49	62.89	68.89	71.42	72.14	71.63		
ATOR DE POTENCIA.....=	0.3804	0.5341	0.6492	0.7298	0.7844	0.8215		
ELOCIDADE.....(Rpm)=	1787.4	1775.7	1762.9	1749.0	1733.5	1714.8		
SCORREGAMENTO.....(%)=	0.70	1.35	2.06	2.83	3.69	4.73		
ORRENTE NOMINAL.....(A)=	13.647	14.944	16.812	19.175	21.997	25.488		
ORRENTE I1.....(A)=	13.405	14.546	16.291	18.566	21.330	24.782		
ORRENTE I2 PRINCIPAL..(A)=	6.945	8.700	11.113	13.963	17.181	20.994		
ORRENTE I2' CRUZADO..(A)=	6.088	5.992	5.884	5.762	5.623	5.456		
ERDAS JOULE ROTOR I2' (W)=	15.59	15.10	14.56	13.964	13.296	12.494		
ERDAS JOULE ESTATOR..(W)=	63.5	76.1	96.3	125.3	164.9	221.4		
ERDAS JOULE ROTOR I2 (W)=	20.3	31.8	51.9	82.0	124.2	185.4		
ERDAS NO FERRO.....(W)=	162.1	162.1	162.1	162.1	162.1	162.1		
ERDAS SUPLEMENTARES..(W)=	8.3	16.6	24.8	33.1	41.4	49.7		
OMATORIA PERDAS.....(W)=	294.2	325.8	373.5	439.9	528.8	653.5		
OTENCIA ABSORVIDA....(W)=	571.0	878.0	1200.6	1539.4	1898.1	2303.3		
OTENCIA UTIL.....(W)=	276.9	552.1	827.1	1099.5	1369.2	1649.8		
ONJUGADO NOMINAL..(Kg.m)=	0.151	0.3	0.457	0.612	0.769	0.937		
/mm2 NO ESTATOR.....=	4.346	4.759	5.354	6.107	7.005	8.117		
/mm2 NA BARRA ROTOR.....=	1.322	1.656	2.115	2.658	3.271	3.997		
/mm2 NO ANEL ROTOR.....=	0.937	1.174	1.499	1.88	2.318	2.833		

ROTOR BLOQUEADO		SATURACAO DOS DENTES		CONJUGADO MAXIMO	
r	= 1.0091	ALFAs1	= 0.2220	Kc	= 0.7897
x	= 0.9974	ALFAs2	= 0.3547	Cmax/Cn	= 2.1161
1	= 0.6534	I'1 (A)=	30.951	Imax (A)=	55.962
2	= 0.6311	I'2 (A)=	34.118	Imax/In	= 2.9185
z	= 0.6534	I'3 (A)=	21.765	Rpm	= 1448.41
inc.	= 0.4823	I''2 (A)=	23.992	s (%)=	19.53
c	= 0.8671				
i1	= 48.67				
princ.	= 90.52				
s	= 0.491				
aux.	= 27.50				
i3	= -36.24				
j	= 84.90				
en(fi)	= 0.9960				
c	= -137.78				
p/Cn	= 2.3098				
p (A)=	96.91				
p/In	= 5.0540				
VA/cv	= 7.1068				

São Paulo, 21 / 06 / 1988

N/Ref:

S/Ref:

Ref: aos dados de enrolamento e construção de motor A4/A1-6a  
(Anel); 5 CV, 4 polos, 50/60 Hz, 3 rotores, tipo Ensino

Estator: Nº de canais = 48 - Ferr. nº 98 (vide anexa)

(X-622) - Diâmetro externo = 240 mm

AN

- Diâmetro interno = 150 mm

- Comprimento do pacote = 85 mm

- Enrolamento de dupla camada com 53 condutores por canal  
(12 grupos de 4 bobinas, cada uma com 26/27/27/26 espiras).- Cada condutor é formado por 1 fio Nº 20 AWG e 1 fio Nº 21  
AWG.

- Passo 1 → 11 (passo de 10 ranhuras)

- Ligação do enrolamento  $\Delta\Delta/\lambda\lambda$  (220/380 V - 50/60 Hz)  
(lig. paralela)Entreferro = 0,4 mm

Rotor = 1) Rotor de anéis

Diâmetro externo = 149,2 mm

(X-622)

AN

Nº de canais = 36 = Ferr. Nº 5 (vide anexa)

Comprimento do pacote = 89 mm

Enrolamento de dupla camada com 12 condutores por canal  
(12 grupos de bobinas - cada um com 3 bobinas de 6 espiras).Cada condutor é formado por 1 fio Nº 15 AWG e 1 fio Nº 14  
AWG.

Passo 1 → 8 (passo de 7 ranhuras)

Ligação série,  $\lambda$ -3 pontas

2) Rotor de dupla gaiola

(X-2949)

AN

Diametro externo = 149,2 mm

Compr. do pacote = 89 mm

Nº de canais = 58 - Ferr. nº 281 (vide anexa)

Gaiola superior: cobre -  $\varnothing$  3,66 mm - compr. = 105 mm

anéis - cobre - 7,94 x 7,94 mm

medido  
/ 12

São Paulo, 21 / 06 / 1988

N/Ref: Ref: aos dados de enrolamento e construção de motor A4/A1 6a  
S/Ref: (Anel); 5 CV, 4 polos, 50/60 Hz.

(X-2949) - Gaiola Inferior - Cobre - 1,58 x 6,35 mm  
AN (Compr.  $\approx$  105 mm)  
Anéis <sup>de curto</sup>  $\approx$  7,54 x 7,54 mm

## 3) Rotor de Gaiola simples

(X-299) Diametro externo = 149,2 mm  
EQ Nº de canais = 58 - Ferr. 91 (vide anexa)  
Compr. do pacote = 89 mm  
Gaiola, mat. cobre - 2 x 13 mm, compr.  $\approx$  105 mm  
Anéis de curto: cobre: 9,5 x 15,8 mm

- Diametro do eixo = 48 mm
- Material = Aço 1045

=====

Em relação aos ensaios seguem cópias de:

- Ensaios de: vazio, curto e carga para o motor de anéis (realizados em 60 Hz,) vazio, curto e carga para o motor de dupla gaiola (realizados em 50 Hz) e vazio, curto e carga para o motor de gaiola simples realizados em 60 Hz).

(Ensaio anexos)



ELÉTRICA E MECÂNICA LTDA.

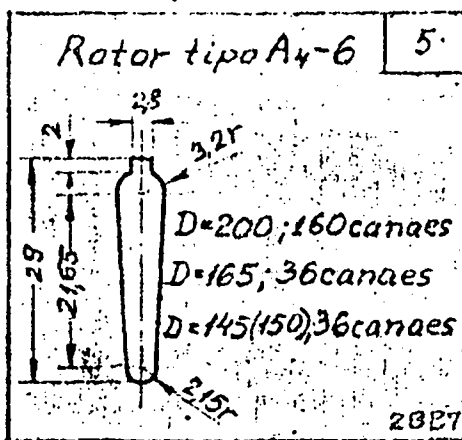
DATA	DESENHO

Rua: SECUNDINO DOMINGUES, 787

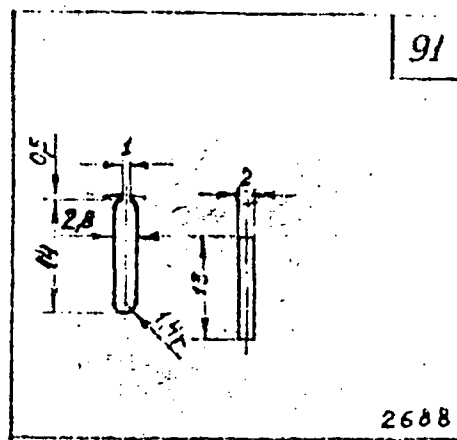
J. INDEPENDÊNCIA - CEP 03223

Fone: 918 0777 TELEX (011) 34.169 IECE BR

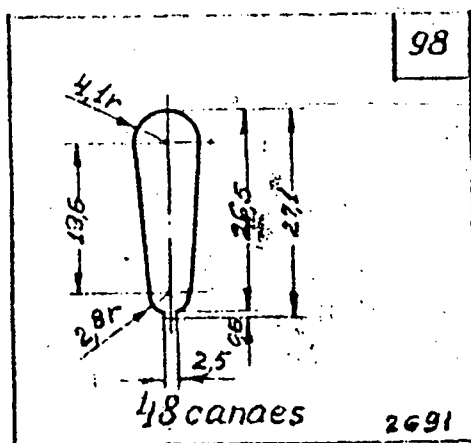
SÃO PAULO - BRASIL.



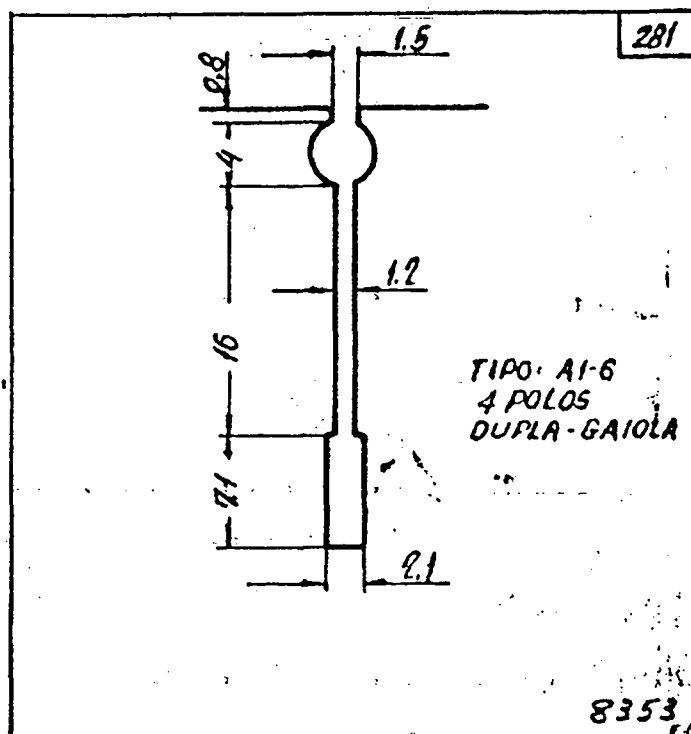
FERRAMENTA: Nº 05



FERRAMENTA: Nº 01



FERRAMENTA: Nº 98



FERRAMENTA: Nº 281



# ELETRO MÁQUINAS ANEL S.A.

## FOLHAS DE ENSAIOS PARA MÁQUINAS ASSÍNCRONAS

CLIENTE PUCRJ

NOSBO PEDIDO Nº 8402

TIPO A1-60 IV XNº 2949

MÁQUINA Nº

### DADOS DE PLACA

HP	RPM	Hz	Ligação	Volts	Ampères	Rotor		Isolação	Observações
						Volts	Ampères		
5	1450	60	Δ/Y	220/380	13/7.5	—	—	A	Dupla gaiola

### ENSAIOS

VAZIO							CURTO - CIRCUITO									
Ligação Δ							Ligação Δ Braço 1070g									
V	I	W <sub>1</sub>	W <sub>2</sub>	X	W	RPM	V	I	W <sub>1</sub>	W <sub>2</sub>	X	W	F <sub>bruta</sub>	C %	R <sub>p</sub> /fase	
300	18.75	228	-210	10	1180	1485	220						21,600	271		
280	14.35	236	-158	*	780											
260	11.05	161	-110		510											
240	8.50	280	-190	4	360											
220	6.56	199	-131		272		78.5	8.0	270	50		640	38.7	0.589		
200	5.04	145	-90		212											
180	4.20	110	-68		168		80.0	8.0	275	50		650	38.0	0.587		
160	3.40	85	-47		152											
140	2.74	120	-60	2	120		80.0	8.0	270	50		640	38.0	0.577		
120	2.37	139	-82	1	107											
100	1.94	139	-46		93											
80	1.59	100	-20		80											
60	1.29	70	0		70											
40	1.20	50	18		68											
30	1.42	41	20		61											

CARGA V. 220 V. Compensação 50 A												Resistência	
Ligação Δ Braço 45cm Tara 1070g												Estator	Rotor
I <sub>1</sub>	F	W <sub>1</sub>	W <sub>2</sub>	X	W <sub>el</sub>	RPM	F <sub>bruta</sub>	W <sub>el</sub> (W <sub>1</sub> - W <sub>2</sub> )	η	I <sub>p</sub>	I <sub>2</sub>		
6.25	49.5	89	-51	10	380	1485	1220	0.103	0.271	0.160		tamb 24°	tamb
6.50		115	-23		920	1475	2000	0.635	0.690	0.372		ligação Δ	ligação Δ
7.40		145	3		1480	1465	2820	1.188	0.803	0.525		R: 1.19 Ω/fase	R: Ω/fase
8.50		172	32		2040	1460	3620	1.723	0.845	0.630			
9.55		200	58		2580	1450	4400	2.235	0.866	0.709			
10.65		235	84		3190	1440	5210	2.760	0.865	0.794			
12.58		266	110		3760	1425	6020	3.265	0.868	0.790			
14.0		299	128		4270	1420	6740	3.725	0.873	0.803			
15.7		338	159		4970	1410	7630	4.280	0.862	0.831			
17.4		373	182		5550	1390	8420	4.730	0.853	0.836			
18.9		408	212		6200	1385	9130	5.160	0.833	0.860			
20.7		446	232		6780	1370	9940	5.625	0.830	0.861			
23.0		495	260		7550	1350	10730	6.050	0.812	0.862			
25.0		535	280		8150	1325	11450	6.355	0.780	0.850			

### Parâmetros e Perdas

Z <sub>cc</sub>	I <sub>ARR</sub>
R <sub>cc</sub>	P <sub>re</sub>
X <sub>cc</sub>	P <sub>cus</sub>
R <sub>1</sub>	P <sub>cvt</sub>
R <sub>2</sub>	P <sub>ncc</sub>
X <sub>m</sub>	P <sub>adic</sub>
R <sub>p</sub>	Σ Perdas

MOTOR C/ ROTOR BOBINADO

Iso-  
lação  
(MΩ)

ENTRE-FASES  
FASE/MASSA

EST:  
ROT:  
EST:  
ROT:

Tensão Aplicada.

Rotor KV Estator KV

Observações Ensaio em 50 Hz ←

## BIBLIOGRAFIA

- Agarwal, P.D., "Equivalent circuits and performance calculations of canned motors", AIEE Winter General Meeting, New York, outubro 1960, pp 635-642.
- Agarwal, P.D. and Alger, P.L., "Saturation factors for leakage reactance of induction motors", AIEE Fall General Meeting, Chicago, fevereiro 1961, pp 1037-1042.
- AIEE COMMITTEE REPORT, "Induction motor leakage reactance calculations", AIEE Transactions vol 67, maio 1948, pp 430-434.
- Alger, P.L., "The nature of induction machines", Science Publisher, 1965, N.Y.
- Arkkio, A. and Hauru, A., "Transient analysis of induction motors by a time-stepping finite element technique", BISEF'88, Beijing, outubro 1988.
- Arkkio, A., "Analysis of induction motors based on the numerical solution of the magnetic field and circuit equations", Acta Polytechnica Scandinavica - Electrical Engineering Series vol 59, 1987.
- Barbi, I., "Teoria Fundamental do Motor de Indução", Editora UFSC/Eletróbrás, 1985, Florianópolis.
- Barton, T.H. and Dunfield, J.C., "MMF-harmonics effects in induction motors with phase-wound rotors", IEE proc. vol 116, junho 1969, pp 965-972.
- Barton, T.H. and Poloujadoff, M., "The polyphase cylindrical machine", IEEE Winter Meeting, New York, 1972.
- Barton, T.H. and Poloujadoff, M., "A generalized symmetrical components transformation for cylindrical electric machines", IEEE pass vol 91, setembro 1972, pp 1781-1786.
- Burbidge, R.F. and Fryett, M.L., "Synchronous and asynchronous torques in squirrel-cage induction motors", IEE proc. vol 114, novembro 1967, pp 1665-1673.
- Carpenter, C.J. and Locke, D.H., "Numerical models of three-dimensional winding arrays", Compumag, Oxford, 1988, pp 47-54.
- Chalmers, B.J. and Mulki, A.S., "Design synthesis of double-cage induction motors", Proc. IEE vol 117, julho 1970, pp 1257-1263.
- Chatelain, J., "Machines Electriques", Dunod, 1983, França.
- Christofides, B., "Origins of load losses in induction motors with cast aluminium rotors", IEE proc. vol 112, dezembro 1965, pp 2317-2337.

- Dabrowski, M.I., "Numerical analysis of impedance for the cage-rotor bar of arbitrary shape", ICEM 88, 1988, pp 165-169.
- Danilevich, Y.B. and Yakovlev, V.I., "Three dimensional magnetic field mathematical model and its applications to calculation of fields and losses in turbogenerator end regions", *Revue de Physique Appliquée* vol 25, julho 1990, pp 661-667.
- Davis, J.H. and Novotny, D.W., "Equivalent circuits for single-phase squirrel-cage induction machines with both odd and even order mmf harmonics", *IEEE TPAS* vol 88, julho 1969, pp 1080-1086.
- Davis, J.H. and Novotny, D.W., "Analysis of even order mmf harmonics in squirrel cage induction motors", *IEEE PAS* vol 5, fevereiro 1972, pp 1787-1793.
- Drozdowsky, P. and Sobczyk, T.J., "On a mathematical model of squirrel-cage induction motors", *Archiv für Elektrotechnik* vol 70, Cracow, 1987, pp 371-382.
- Falcone, A.G., "Eletromecânica. Máquinas elétricas rotativas", Editora Edgar Blücher Ltda, 1985, São Paulo.
- Ferreira de Jesus, J.M., "A model for saturation in induction machines", *IEEE TEC* vol 3, setembro 1988, pp 682-687.
- Fitzgerald, A.E., Kingsley Jr, C. and Kusko, A., "Máquinas Elétricas", Mc Graw Hill-Brasil, 1975, México.
- Fuchs, E.F., Poloujadoff, M. and Neal, G.W., "Starting performance of saturable three-phase induction motors", *IEEE TEC* vol 3, setembro 1988, pp 624-635.
- Hantel, P., "Parametric excitation of an induction machine", *ICEM 88*, 1988, pp 1-15.
- Hashem, A.M., "A new method for prediction of induction machine transients under balanced and unbalanced conditions", *ICEM 88*, 1988, pp 495-499.
- Haus, H.A. and Penhune, J.P., "Case Studies in Electromagnetism", John Wiley & Sons, Inc., 1960, New York.
- Hommes, E. and Paap, G.C., "The analysis of the 3-phase squirrel-cage induction motor with space harmonics", *Archiv für Elektrotechnik* vol 67, Delft, 1984, pp 217-236.
- Jones, C.V., "The Unified Theory of Electrical Machines", Butterworth & Co. Ltd., 1967, London.
- Kassick, E.V., "Contribution à la modélisation des machines asynchrones à cage à partir du calcul des champs", Tese de Doutorado, 1990, Toulouse.
- Kassick, E.V., Huang, J., Davat, B. and Lajoie-Mazenc, M., "Field modelling of asynchronous machine", 1990, pp 37-40.

- Kostenko, M. & Piotrovsky, L., "Electrical Machines", Mir Publishers, 1969, Moscow.
- Krause, P.C., "Simulation of unsymmetrical 2-phase induction machines", IEEE TPAS vol 84, novembro 1965, pp 1025-1037.
- Kron, G., "Induction motor slot combinations: Rules to predetermine crawling, vibration, noise and hooks in the speed-torque curve", AIEE Winter Convention, New York, junho 1931, pp 757-768.
- Kron, G., "Equivalent Circuits of Electrical Machinery", John Wiley & Sons, Inc., 1951, New York.
- Kuhlmann, J.H., "Diseño de Aparatos Electricos", John Wiley & Sons Inc., 1965, New York.
- Langsdorf, A.S., "Teoria de Las Máquinas de Corrente Alterna", Libros Mc Graw Hill, 1977, México.
- Lazarevic, Z. and Skokljek, I., "Rotor-bar Skin effect modelling of asynchronous machines", ICEM 88, 1988, pp 437-440.
- Lesenne, J., Notelet, F. and Segulier, G., "Introduction à l'électrotechnique approfondie", Technique & Documentation, 1981, Paris.
- Levi, E., "Polyphase motors", John Wiley & Sons, 1984, USA.
- Lijie, M. and Shanchun, Xu., "Improvements of numerical calculation of 2-D magnetic field in the end zone of generators", 1989, pp 172-174.
- Lilwischitz, M., "Macchine Elettriche", Editore Ulrico Hoepli Milano, 1964, Milano.
- Mahmoud, A.M.A. and Menzies, R.W., "A complet time domain model of the induction motor for efficiency evaluation", IEEE, 1988, pp 1-8.
- Majmudar, H., "Electromechanical Energy Converters", John Wiley & Sons, 1965, New York.
- Mesquita, R.C. e Assumpção Bastos, J.P., "Cálculo de campos magnetostáticos não lineares tridimensionais utilizando elementos finitos", II Simpósio Franco-Brasileiro sobre Cálculo de Campos Elétricos e Magnéticos, 1989(a), pp 58-69.
- Mesquita, R.C. e Assumpção Bastos, J.P., "Cálculo do campo magnético criado por configurações típicas de corrente", II Simpósio Franco-Brasileiro sobre Cálculo de Campos Elétricos e Magnéticos, 1989 (b), pp 159-169.
- Middendorf, W.H., "An approach to induction motor synthesis", AIEE Winter General Meeting, New York, abril 1962, pp 64-69.
- Nasar, S.A. & Unnewehr, L.E., "Electromechanics and Electric Machines", John Wiley & Sons, 1979, México.
- Nascimento, J.L., Mesquita, R.C., Carlson, R. e Bastos J.P.A., "Impedância de cabeça de bobina: Uma aplicação de cálculo de campos magnetostáticos

- tridimensionais", 8o CBA, Belém, setembro 1990, pp 548-553.
- Ostovic, V., "A method for evaluation of transient and steady state performance in saturade squirrel cage induction machine", IEEE TEC vol 3, setembro 1986, pp 190-197.
- Ostovic, V., "A simplified approach to magnetic equivalent-circuit modeling of induction machines", IEEE TIA vol 24, março/abril 1988, pp 308-316.
- Paap, G.C., "The analysis of 3-phase squirrel-cage induction motors including space harmonics and mutual slotting in transient and steady state", IEEE TEC vol 6, março 1991, pp 69-75.
- Paap, G.C., "On the theory of 3-phase squirrel-cage induction motors including space harmonics and mutual slotting", IEEE TEC vol 6, março 1991, pp 76-82.
- Preston, T.W., Reece, A.B.J. and Sangha P.S., "Induction motor analysis by time-stepping techniques", IEEE TM vol 24, janeiro 1988.
- Robinson, R.B., "Inductance coefficients of rotating machines expressed in terms of winding space harmonics", IEE proc vol 111, abril 1964, pp 769-774.
- Roberts, G.J., "A dynamic induction motor model including space harmonics", Electric Machines Electromechanics vol 3, 1979, pp 177-190.
- Russek, J., "Computerorientierter algorithmus der analyse einer stationär betriebenen asynchronmaschine", Archiv für Elektrotechnik vol 71, 1988, pp 229-236, Kraków.
- Say, M.G., "Alternating Current Machines", Longman, Scientific & Technical, 1986, London.
- Say, M.G., "The Performance and Design of Alternating Current Machines", Longman, Scientific & Technical, 1968, London.
- Simkin, J. & Trowbridge, C.W., "On the use of the total escalar potencial in the solution of field problems in magnetostatics", Int. J. Num. Eng. vol 14, 1979, pp 423-440.
- Smolensky, A.I., "Electrical Machines", Mir Publisher, 1982, Moscow.
- Sobczyk, T.J. and Sobczyk, K., "On searching for a transformation matrix to equations of A.C. machines", ICEM 88, 1988, pp 183-186.
- Sobczyk, T.J., "Calculation of time constants of squirrel-cage induction motors", ICEM 88, 1988, pp 177-181.
- Sobczyk, T.J. and Weinreb, K., "Analysis of currents and an electromagnetic torque in steady states of induction squirrel-cage motors with asymmetric stator windings", Archiv für Elektrotechnik vol 71, 1988, pp 245-256, Kraków.
- Spadim, O., "Um Modelo Matemático para Máquinas Síncronas e Assíncronas

- Considerando a Saturação Magnética", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1984, Rio de Janeiro.
- Still, A. and Siskind, C.S., "Elements of Electrical Machine Design", Mc Graw Hill Book Company, Inc., 1954.
- Veinott, C.G., "Theory and Design of Small Induction Motors", Mc Graw-Hill Company, Inc., 1959, London.
- Wallace, A.K., Ward, E.S. and Wright, A., "Sources of harmonic currents in slip-ring induction motors", IEE Proc. vol 121, dezembro 1974, pp 1495-1500.
- Wallace, A.K. and Wright, A., "Novel simulation of cage windings based on mesh circuit model", IEEE PES Summer Meeting, Vancouver, abril/maio 1973, pp 1-5.
- White, D.C. and Woodson, H., "Electromechanical Energy Conversion", John Wiley & Sons, Inc., 1959, EEUU.
- Williamson, S. and Begg, M.C., "Calculation of the resistance of induction motor end rings", IEE Proceedings vol 133, março 1986, pp 54-60.
- Williamson, S., Lim, L. H. and Robinson, M.J., "Finite-element models for cage induction motor analysis", IEEE TIA vol 26, novembro/dezembro 1990, pp 1007-1017.
- Williamson, S. and Ralph, J.W., "Finite-element analysis for nonlinear magnetic field problems with complex current sources", IEE proc. vol 129, agosto 1982, pp 391-395.
- Woodson, H.H. & Melcher, J.R., "Electromechanical and Electric Machines", John Wiley & Sons, 1968, New York.